



**TUGAS AKHIR -TE 141599**

**KONTROL *TRACKING* OPTIMAL UNTUK ROBOT  
PENDULUM TERBALIK BERODA DUA**

Luthfi Arfiansyah  
NRP 2213 106 048

Dosen Pembimbing  
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.  
Mochammad Sahal, ST., M.Sc.

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO  
Fakultas Teknologi Industri  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016



**FINAL PROJECT -TE 141599**

**OPTIMAL TRACKING CONTROL OF TWO-WHEELED  
INVERTED PENDULUM ROBOT**

Luthfi Arfiansyah  
NRP 2213 106 048

Advisor  
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.  
Mochammad Sahal, ST., M.Sc.

ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT  
Faculty of Industrial Technology  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016

## PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi sebagian maupun keseluruhan Tugas Akhir saya dengan judul “**Kontrol *Tracking* Optimal untuk Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua**” adalah benar-benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diijinkan dan bukan merupakan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya sendiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka.

Apabila ternyata pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, Januari 2016

Luthfi Arfiansyah

**KONTROL *TRACKING* OPTIMAL UNTUK ROBOT  
PENDULUM TERBALIK BERODA DUA**

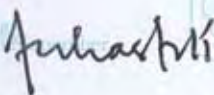
**TUGAS AKHIR**

**Diajukan Guna Memenuhi Sebagian Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik  
Pada**

**Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan  
Jurusan Teknik Elektro  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Menyetujui :**

**Dosen Pembimbing I**



**Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.**  
**NIP.196808121994032001**

**Dosen Pembimbing II**



**Mochammad Sahal, ST., M.Sc.**  
**NIP. 197011191998021002**



# KONTROL *TRACKING* OPTIMAL UNTUK ROBOT PENDULUM TERBALIK BERODA DUA

**Nama** : Luthfi Arfiansyah  
**Pembimbing 1** : Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.  
**Pembimbing 2** : Mochammad Sahal, ST., M.Sc.

## ABSTRAK

Robot pendulum terbalik beroda dua adalah robot yang memiliki prinsip kerja seperti pendulum terbalik. Sistem robot pendulum terbalik beroda memiliki karakteristik tidak stabil dan tidak linier. *Tracking* merupakan salah satu permasalahan yang terdapat pada sistem robot pendulum terbalik beroda dua. Kontrol *tracking* dilakukan agar robot dapat bergerak sesuai dengan sinyal referensi yang diberikan dan tetap mempertahankan kestabilan dari robot dalam posisi tegak (pada garis vertikal imajiner 0 radian). Dari permasalahan ini maka dibuat skema kontrol servo tipe 1 untuk keperluan *tracking* posisi robot pada sumbu x dan sudut *yaw* dari robot. Besarnya *gain* dari sistem kontrol tracking diperoleh dengan menggunakan metode kontrol optimal *Linear Quadratic Regulator*. Hasil simulasi menunjukkan bahwa skema kontrol yang dirancang mampu membuat robot bergerak menuju posisi yang diinginkan pada sumbu x dan dapat melakukan rotasi pada sumbu z (*yaw*) sesuai dengan sinyal referensi yang diberikan dengan tetap menjaga batang pendulum pada posisi tegak pada pergerakan sudut pendulum yang terbatas. Hasil dari perancangan disimulasikan menggunakan laboratorium virtual.

**Kata Kunci:** *Tracking*, Sistem Servo Tipe 1, Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua, *Linear Quadratic Regulator*.



# **OPTIMAL TRACKING CONTROL OF TWO-WHEELED INVERTED PENDULUM ROBOT**

**Name** : Luthfi Arfiansyah  
**Advisor 1** : Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.  
**Advisor 2** : Mochammad Sahal, ST., M.Sc.

## **ABSTRACT**

*Two-wheeled inverted pendulum robot is a robot that has a working principle as inverted pendulum. Wheeled inverted pendulum robot system has unstable and nonlinear characteristics. Tracking is one of the problems that can be found in two-wheeled inverted pendulum robot system. Tracking control is designed so that the robot can move in accordance with a given reference signal and maintaining the stability of the pendulum in the upright position (imaginary vertical line 0 radians). Because of this problem, type 1 servo control scheme is designed for the purposes of tracking the position of the robot on the x-axis and yaw angle of the robot. The control gain of the tracking control system is obtained by using optimal control methods, Linear Quadratic Regulator. The simulation results show that the proposed control scheme is able to make the robot move towards the desired position on the x axis and can rotate about the z-axis (yaw) according to the reference signal is given and keeping the pendulum in an upright position with limited movement of pendulum angle. The control design proposed is simulated on virtual lab.*

**Keywords:** *Tracking, Type 1 Servo System, Two-Wheeled Inverted Pendulum robot, Linear Quadratic Regulator.*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Puji syukur kehadirat Allah S.W.T. karena atas rahmat dan karunia-Nya Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Strata-1 pada Bidang Studi Teknik Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Isntitut Teknologi Sepuluh November Surabaya dengan judul:

### **KONTROL *TRACKING* OPTIMAL UNTUK ROBOT PENDULUM TERBALIK BERODA DUA**

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis atas dukungan berupa motivasi, material, dan spiritual yang diberikan.
2. Ibu Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT., dan Bapak Mochammad Sahal, ST., M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan dukungan serta bimbingan mulai dari awal hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
3. Seluruh dosen Jurusan Teknik Elektro ITS khususnya Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan.
4. Teman seperjuangan dan teman diskusi, Soraya Parlina yang telah berbagi ilmu dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
5. Teman-teman penulis dan semua pihak yang telah memberikan dukungan, masukan, serta motivasi dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Tugas Akhir ini masih sangat sederhana dan jauh dari sempurna. Saran dan kritik akan penulis terima dengan senang hati. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat dalam pengembangan penelitian yang lebih baik di masa mendatang.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

# DAFTAR ISI

Halaman

|  |        |
|--|--------|
| HALAMAN JUDUL .....  | i      |
| PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR .....                          | v      |
| LEMBAR PENGESAHAN .....  | vii    |
| ABSTRAK .....  | ix     |
| ABSTRACT .....   | xi     |
| KATA PENGANTAR .....   | xiii   |
| DAFTAR ISI .....   | xv     |
| DAFTAR GAMBAR .....  | xvii   |
| DAFTAR TABEL .....   | xix    |
| <br>BAB 1 PENDAHULUAN .....                                    | <br>1  |
| 1.1 Latar Belakang .....                                       | 1      |
| 1.2 Permasalahan .....   | 1      |
| 1.3 Tujuan .....   | 2      |
| 1.4 Metodologi .....   | 2      |
| 1.5 Sistematika Penulisan .....                                | 3      |
| 1.6 Relevansi .....  | 3      |
| <br>BAB 2 TEORI PENUNJANG .....                                | <br>5  |
| 2.1 Tinjauan Pustaka .....                                     | 5      |
| 2.2 Sistem Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua .....            | 6      |
| 2.3 Model Matematika Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua .....  | 6      |
| 2.4 Linearisasi .....  | 10     |
| 2.5 Sistem Servo Tipe 1 .....                                  | 12     |
| 2.5.1 <i>Linear Quadratic Regulator</i> .....                  | 15     |
| <br>BAB 3 PERANCANGAN SISTEM .....                             | <br>21 |
| 3.1 Pemodelan Sistem Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua .....  | 21     |
| 3.2 Linearisasi Model Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua ..... | 23     |
| 3.3 Sistem Servo Tipe 1 .....                                  | 27     |
| 3.4 Perancangan Laboratorium Virtual .....                     | 30     |
| 3.4.1 Perancangan <i>Virtual Reality</i> 3D .....              | 21     |
| 3.4.2 Perancangan MATLAB GUI .....                             | 31     |
| 3.4.3 Perancangan <i>Simulink</i> .....                        | 33     |



|  |        |
|--|--------|
| BAB 4 SIMULASI DAN ANALISA DATA .....                      | 37     |
| 4.1 Simulasi dengan Sudut Awal Pendulum yang Berbeda ..... | 37     |
| 4.2 Simulasi dengan Referensi Posisi yang Berbeda .....    | 40     |
| 4.3 Simulasi dengan Gangguan .....                         | 43     |
| 4.4 Simulasi dengan Kontrol Sudut <i>Yaw</i> .....         | 44     |
| 4.4 Hasil Simulasi dari Laboratorium Virtual .....         | 46     |
| <br>BAB 5 PENUTUP .....                                    | <br>49 |
| 5.1 Kesimpulan .....                                       | 49     |
| 5.2 Saran .....  | 49     |
| <br>DAFTAR PUSTAKA .....                                   | <br>51 |
| LAMPIRAN A .....   | 53     |
| LAMPIRAN B .....   | 59     |
| RIWAYAT HIDUP .....  | 61     |

## DAFTAR GAMBAR

|  | Halaman |
|--|---------|
| Gambar 2.1 Robot pendulum terbalik beroda dua .....  | 6       |
| Gambar 2.2 Koordinat parameter geometrik dari TWIP .....   | 7       |
| Gambar 2.3 Sistem Servo tipe 1 untuk <i>plant</i> tanpa integrator .....   | 13      |
| Gambar 2.4 Kontrol <i>gain state feedback</i> menggunakan metode LQR .....                                       | 15      |
| Gambar 3.1 Diagram <i>Simulink</i> untuk model robot pendulum terbalik beroda dua.....                           | 22      |
| Gambar 3.2 Diagram <i>Simulink</i> untuk subsistem Inisialisasi Parameter .....                                  | 22      |
| Gambar 3.3 Diagram <i>Simulink</i> untuk subsistem $X_2$ .....   | 23      |
| Gambar 3.4 Diagram <i>Simulink</i> untuk subsistem $X_4$ .....   | 23      |
| Gambar 3.5 Diagram <i>Simulink</i> untuk subsistem $X_6$ .....   | 23      |
| Gambar 3.6 Integrasi MATLAB GUI, <i>Simulink</i> , dan <i>Virtual Reality</i> 3D pada laboratorium virtual ..... | 30      |
| Gambar 3.7 Tampilan dari <i>V-Realm Builder</i> dengan sudut pandang <i>Follow</i> .....                         | 31      |
| Gambar 3.8 Tampilan dari laboratorium virtual dengan sudut pandang <i>Follow</i> .....                           | 32      |
| Gambar 3.9 Diagram <i>Simulink</i> untuk simulasi .....  | 35      |
| Gambar 4.1 Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal 0,25 rad, 0,5 rad, 1 rad .....                            | 37      |
| Gambar 4.2 Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal 1,1 rad .....   | 38      |
| Gambar 4.3 Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan sudut awal 0,25 rad, 0,5 rad, 1 rad. ....                 | 38      |
| Gambar 4.4 Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan sudut awal 1,1 rad .....                                  | 39      |
| Gambar 4.5 Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal -1 rad.....   | 39      |
| Gambar 4.6 Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal -1,1 rad .....  | 39      |
| Gambar 4.7 Pergerakan sudut pendulum robot dengan referensi posisi yang berbeda.....                             | 41      |
| Gambar 4.8 Kecepatan sudut pendulum robot dengan referensi posisi yang berbeda.....                              | 41      |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Gambar 4.9  | Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan referensi posisi yang berbeda.....                   | 41 |
| Gambar 4.10 | Kecepatan robot pada sumbu x dengan referensi posisi yang berbeda.....                           | 42 |
| Gambar 4.11 | Sinyal kontrol $u_1$ roda robot dengan referensi posisi yang berbeda.....                        | 42 |
| Gambar 4.12 | Sinyal gangguan pada sudut pendulum.....   | 43 |
| Gambar 4.13 | Pergerakan sudut pendulum robot dengan gangguan ..   | 43 |
| Gambar 4.14 | Posisi robot dengan gangguan.....  | 44 |
| Gambar 4.15 | Sudut $yaw$ robot .....  | 44 |
| Gambar 4.16 | Posisi robot untuk pengujian kontrol $yaw$ .....   | 45 |
| Gambar 4.17 | Pergerakan sudut pendulum dengan kontrol $yaw$ .....   | 45 |
| Gambar 4.18 | Sinyal kontrol $u_2$ .....   | 45 |
| Gambar 4.19 | Torsi motor kanan dan kiri dari robot dengan kontrol $yaw$ .....                                 | 45 |
| Gambar 4.20 | Tampilan laboratorium saat nilai referensi posisi 10 m dengan tampilan dari samping .....        | 47 |
| Gambar 4.21 | Tampilan laboratorium saat nilai referensi sudut $yaw$ diubah dengan tampilan dari samping ..... | 47 |

## DAFTAR TABEL

|  | Halaman |
|--|---------|
| Tabel 2.1 Parameter Geomterik Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua.....  | 9       |
| Tabel 4.1 Hasil respon sudut pendulum robot pada percobaan dengan sudut awal pendulum yang berbeda .....                           | 40      |
| Tabel 4.2 Hasil respon sudut pendulum robot dan posisi robot pada sumbu x pada percobaan dengan referensi posisi yang berbeda..... | 42      |





# BAB 1

## PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang dari tugas akhir. Berdasarkan latar belakang tersebut maka dirumuskanlah permasalahan yang dihadapi pada tugas akhir ini, tujuan tugas akhir, metodologi, sistematika penulisan, dan relevansi dari tugas akhir ini.

### 1.1 Latar Belakang

Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua adalah robot yang merupakan gabungan dari dua sistem yaitu sistem pendulum terbalik dan sistem *mobile robot* [1]. Pada dasarnya sistem robot pendulum terbalik beroda dua sama dengan sistem klasik pendulum kereta yang memiliki karakteristik tidak stabil dan nonlinear tetapi dapat distabilkan di sekitar titik kesesimbangannya. Perbedaan antara kedua sistem tersebut adalah pada sistem robot pendulum terbalik beroda dua menggunakan dua buah roda menggantikan kereta yang ada pada sistem pendulum kereta sehingga menambah satu derajat kebebasan.

Permasalahan kontrol yang umum pada sistem robot pendulum terbalik beroda dua adalah stabilisasi dan *tracking*. Stabilisasi adalah usaha untuk menjaga kestabilan dari robot untuk berdiri tegak pada sudut 0 radian. Sedangkan *tracking* adalah usaha untuk mengontrol respon dari robot agar bergerak mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap melakukan stabilisasi.

Skema kontrol sistem servo tipe 1 dengan *gain* kontrol yang didapat metode kontrol optimal LQR dipilih untuk mengontrol robot pendulum terbalik beroda dua dikarenakan robot pendulum terbalik beroda dua tidak memiliki integrator. Pemilihan elemen pada matriks Q dan R didasarkan pada *state* mana yang diinginkan untuk mencapai *time settling* lebih cepat [2]. Tetapi sebelumnya linearisasi model matematika harus dilakukan agar metode kontrol LQR dapat diterapkan.

Permasalahan yang akan diselesaikan pada Tugas Akhir ini adalah stabilisasi, *tracking* posisi, dan *tracking* sudut *yaw*. Mengacu pada [3] dimana permasalahan *tracking* posisi dan stabilisasi dari robot pendulum terbalik beroda dua diselesaikan dengan metode kontrol optimal *Linear Quadratic Regulator* (LQR) menggunakan skema kontrol modifikasi dari sistem servo. Hasil dari perancangan sistem kontrol akan disimulasikan menggunakan laboratorium virtual yang pembuatannya mengacu pada [4].

## 1.2 Permasalahan

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah menghasilkan respon posisi dan sudut *yaw* dari robot pendulum terbalik beroda dua yang dapat melakukan *tracking* posisi dan sudut *yaw* sesuai sinyal referensi yang diberikan dengan mempertahankan batang pendulum pada posisi tegak pada sudut sekitar 0 radian.

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah merancang sistem kontrol robot pendulum terbalik beroda dua dengan menggunakan sistem servo tipe 1 dengan *gain* yang didapat dari metode kontrol optimal LQR agar robot dapat melakukan stabilisasi, *tracking* posisi, dan *tracking* sudut *yaw* sesuai dengan sinyal referensi yang diberikan yang kemudian akan disimulasikan kedalam laboratorium virtual.

## 1.4 Metodologi

Pelaksanaan Tugas Akhir dilakukan dengan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Tahap ini merupakan pembelajaran terhadap apa yang akan dihadapi pada pelaksanaan tugas akhir ini. Hal-hal yang akan dipelajari adalah:

- Konsep dasar robot pendulum terbalik beroda dua
- Desain sistem kontrol servo tipe 1
- Metode kontrol optimal LQR

b. Pemodelan sistem

Tahap ini dilakukan dengan membuat model matematika dari robot pendulum terbalik beroda dua. Model matematika tersebut akan digunakan untuk membentuk persamaan *state*..

c. Perancangan sistem kontrol

Tahap ini dilakukan dengan cara membuat sistem kontrol servo tipe 1 untuk sistem robot pendulum terbalik beroda dua dan menggunakan metode kontrol optimal LQR untuk mencari *gain* kontrol.

d. Perancangan laboratorium virtual

Tahap ini dilakukan dengan cara merancang dan membuat program pemodelan simulasi 3D untuk keperluan simulasi dari sistem Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua



e. Simulasi

Tahap ini merupakan tahap simulasi dari pemodelan sistem kontrol robot pendulum beroda dua yang telah dibuat.

f. Penulisan buku Tugas Akhir

Tahap ini dilakukan dengan menulis dan menyusun buku Tugas Akhir

## 1.5 Sistematika Penulisan

Pembahasan dalam buku Tugas Akhir ini akan dibagi menjadi lima bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan

Bab ini terdiri dari latar belakang, permasalahan, tujuan, metodologi, sistematika laporan, dan relevansi.

BAB II : Tinjauan Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori yang berkaitan dengan pelaksanaan Tugas Akhir ini meliputi konsep Robot Pendulum Beroda Dua, linearisasi, sistem servo tipe 1, dan metode optimal LQR.

BAB III : Perancangan Sistem

Bab ini membahas perancangan dari desain simulasi sistem kontrol Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua menggunakan sistem servo tipe 1.

BAB IV : Simulasi dan Analisa Sistem

Bab ini menjelaskan tentang analisa dari hasil simulasi sistem kontrol Robot Pendulum Beroda Dua.

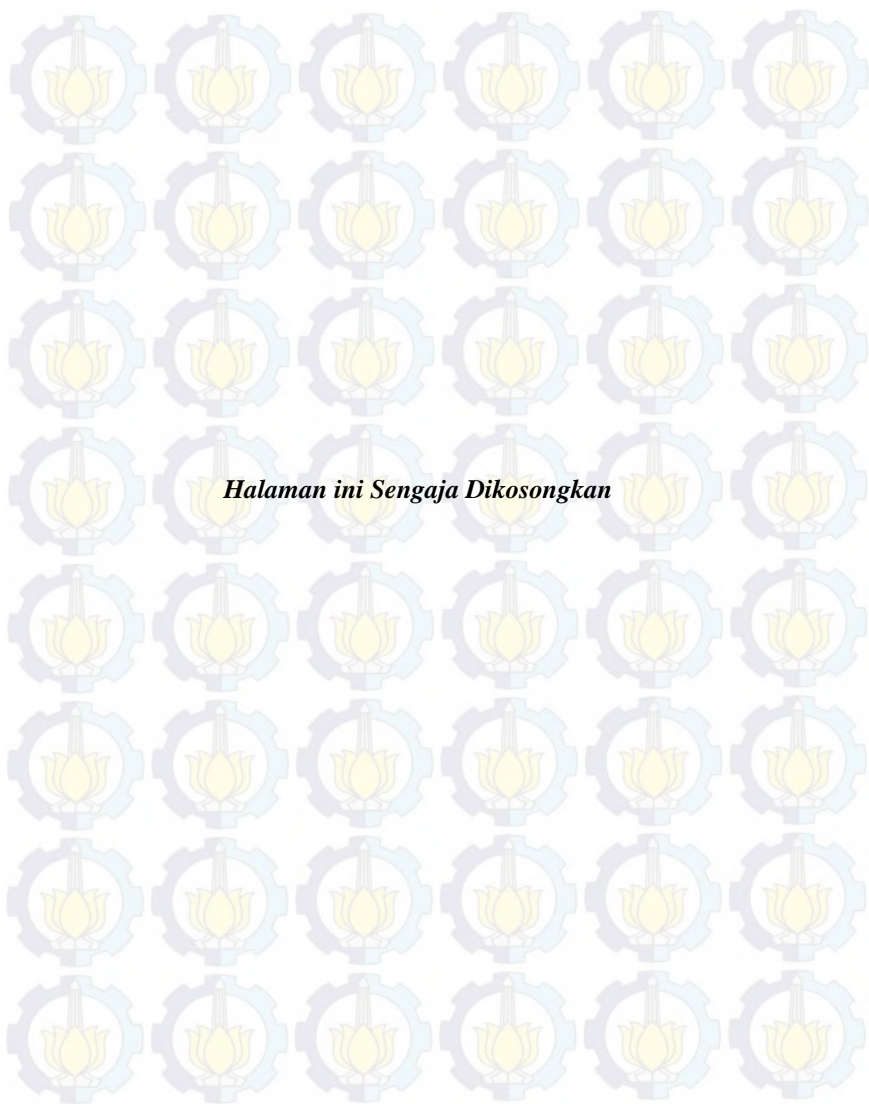
BAB V : Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan yang telah diperoleh.

## 1.6 Relevansi

Hasil yang didapatkan dari Tugas Akhir ini diharapkan dapat menjadi referensi referensi perbandingan desain kontrol *tracking* posisi dan sudut *yaw* dari sistem robot pendulum terbalik beroda dua.





## BAB 2

### TEORI PENUNJANG

Bab ini membahas tentang hal-hal yang menjadi dasar teori dalam pelaksanaan tugas akhir. Pada bagian awal akan diberikan gambaran umum landasan teori yang digunakan pada tugas akhir ini. Selanjutnya dibahas tentang teori-teori pendukung, meliputi sistem robot pendulum terbalik beroda dua, model matematika dari robot pendulum terbalik beroda dua, linearisasi, sistem servo tipe 1, dan metode LQR.

#### 2.1. Tinjauan Pustaka

Karakteristik robot pendulum terbalik beroda dua atau *Two Wheeled Inverted Pendulum* (TWIP) yang nonlinear dan tidak stabil telah banyak menarik minat banyak peneliti khususnya dibidang ilmu kontrol. Selain itu, robot pendulum terbalik beroda dua Juga telah banyak diaplikasikan kedalam berbagai bidang seperti, untuk eksplorasi, logistik, hingga untuk tujuan rekreasi [2]. Beberapa dari implementasi dari sistem *wheeled inverted pendulum* yang telah berhasil dijual produksi massal. Contohnya adalah Segway™, Next Board™, atau Cy Board™.

Berdasarkan jurnal [2], telah banyak penelitian yang dilakukan terhadap robot pendulum terbalik beroda dua khususnya di teknik pengontrolanya. Mulai dari proses stabilisasi, hingga *trajectory tracking* dan melaju pada bidang miring. Misalnya Ha dan Yuta [5], yang berhasil melakukan *trajectory tracking* dengan *Power Wheeled Steering Controller* menggunakan metode kontrol optimal atau Phaoharuhansa [3] yang menggunakan *Tilt Angle Control* yang merupakan modifikasi dari kontrol servo untuk *trajectory tracking*.

Beberapa tugas akhir telah mengangkat permasalahan ini. Made Rachmawaty [9] telah mengajukan simulasi dari stabilisasi dan kontrol posisi robot pendulum terbalik beroda dua menggunakan dua buah kontroler fuzzy yaitu *Fuzzy Balanced Standing Control* (FBSC) dan *Fuzzy Traveling and Position Control* (FTPC). Yoshiadi Wicaksono [4] mempresentasikan kontrol fuzzy berdasarkan yang telah dilakukan Made Rachmawaty [6] ditambah dengan kontrol *yaw* berbasis fuzzy yang kemudian disimulasikan kedalam laboratorium virtual berbasis 3D.

*Tracking* adalah proses pengontrolan dimana *state* dari sistem dikontrol hingga mendekati atau sama dengan nilai referensinya. Sebelum robot melakukan proses *tracking*, robot harus dalam keadaan stabil

terlebih dahulu dimana pendulum robot berada pada sudut sekitar 0 radian sudut vertikal imajiner. Selain itu, robot juga diberikan kontrol *yaw* untuk dapat berbelok sesuai dengan sudut referensi. Skema sistem servo tipe 1 dengan *gain* kontrol yang diperoleh dengan menggunakan metode LQR digunakan untuk menyelesaikan permasalahan stabilisasi dan *tracking* dari robot pendulum terbalik beroda dua.

## 2.2. Sistem Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua

Robot pendulum terbalik beroda dua memiliki desain mekanik yang terdiri dari satu batang pendulum dan dua buah roda yang dihubungkan pada sebuah *chassis* [7]. Gambar 2.1 menjelaskan tentang robot pendulum terbalik beroda dua. Didalam chasis terdapat kontroler, catu daya, dan motor listrik untuk menggerakkan roda robot. Robot pendulum terbalik beroda dua memiliki karakteristik yang mirip dengan sistem pendulum kereta dimana sistem memiliki titik ekuilibrium pada sekitar 0 radian sumbu vertikal imajiner.

Proses stabilisasi dari robot pendulum terbalik beroda dua dilakukan dengan maju-mundurnya robot sesuai dengan arah jatuhnya pendulum. Proses stabilisasi memerlukan kontroler untuk membuat dan menjaga robot dalam keadaan tegak. Pada keadaan tidak stabil robot akan bergerak maju atau mundur sesuai dengan arah jatuh robot.



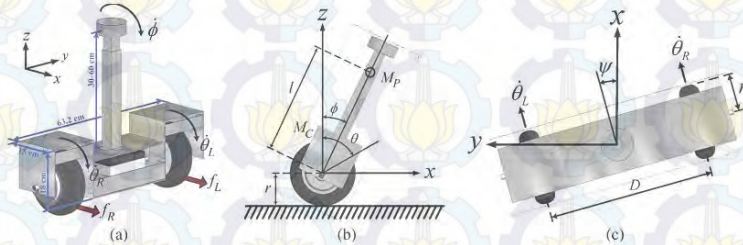
Gambar 2.1 Robot pendulum terbalik beroda dua

## 2.3. Model Matematika Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua

Pemodelan matematika dari robot pendulum terbalik beroda dua diperlukan untuk melakukan kontrol. Model matematika dapat memperlihatkan dinamika dan sifat linearitas dari *plant*. Model matematika dari robot pendulum terbalik beroda dua dapat diketahui dengan dua pendekatan, yaitu menggunakan *Black-box model* dan



berdasarkan persamaan dinamik [2]. *Black-box model* menggunakan data-data masukan dan keluaran sistem untuk mendapatkan model matematika. Sedangkan untuk mendapatkan model matematika berdasarkan persamaan dinamik menggunakan rumus konsep fisika. Pada Tugas Akhir ini menggunakan metode persamaan dinamik untuk mendapatkan model matematika dari robot pendulum terbalik beroda dua yang mengacu pada [8]. Parameter geometrik robot dapat dilihat pada gambar 2.2.



**Gambar 2.2** Koordinat parameter geometrik dari TWIP. (a) tampak miring. (b) tampak samping. (c) tampak atas.

Berdasarkan konsep fisika, gaya dan torsi yang bekerja pada roda kiri dan kanan sama dengan persamaan (2.1) dan (2.2).

$$\begin{aligned} J_w \ddot{\theta}_L &= T_L - H_L r \\ M_w \ddot{x}_L &= -F_L + H_L \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} J_w \ddot{\theta}_R &= T_R - H_R r \\ M_w \ddot{x}_R &= -F_R + H_R \end{aligned} \quad (2.2)$$

dimana  $J_w$  adalah momen inersia dari roda di sumbu y,  $M_w$  adalah massa dari roda,  $\ddot{\theta}_L$  dan  $\ddot{\theta}_R$  adalah percepatan sudut dari roda kiri dan kanan,  $T_L$  dan  $T_R$  adalah torsi yang dihasilkan oleh motor terhadap roda kiri dan kanan,  $H_L$  dan  $H_R$  adalah gaya gesek yang ada pada roda kiri dan kanan, dan  $r$  adalah jari-jari roda.

Gaya keseimbangan yang bekerja pada pendulum pada arah sumbu x dan momen inersia yang bekerja pada titik *origin* O adalah:



$$\begin{aligned} -M_p l \cos(\phi) \ddot{\phi} + M_p l \dot{\phi}^2 \sin(\phi) - M_p \ddot{x} &= F_p \\ J_p \ddot{\phi} + M_p l \cos(\phi) \ddot{x} - M_p g l \sin(\phi) &= J_{PC} \end{aligned} \quad (2.3)$$

dimana  $M_p$  adalah massa pendulum,  $l$  adalah panjang antara poros roda dan pusat gravitasi pendulum,  $\phi$  adalah sudut kemiringan pendulum,  $\dot{\phi}$  adalah kecepatan sudut pendulum,  $\ddot{\phi}$  adalah percepatan sudut pendulum,  $\ddot{x}$  adalah percepatan robot pada sumbu  $x$ ,  $F_p$  adalah gaya interaksi antara *chassis* dan pendulum pada sumbu  $x$ ,  $J_p$  adalah momen inersia dari pendulum terhadap sumbu  $y$  dimana  $J_p = M_p l^2$ , dan  $J_{PC}$  adalah torsi interaksi antara *chassis* dan pendulum terhadap sumbu  $y$ .

Gaya keseimbangan yang bekerja pada *chassis* pada arah sumbu  $x$  dan momen inersia terhadap sumbu  $z$  adalah:

$$\begin{aligned} M_c \ddot{x} &= F_L + F_R + F_p \\ J_c \ddot{\phi} &= -J_{PC} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dimana  $M_c$  adalah massa dari *chassis*,  $F_L$  dan  $F_R$  adalah gaya interaksi antara roda kiri dan kanan terhadap *chassis*, dan  $J_c$  adalah momen inersia dari *chassis* terhadap sumbu  $y$ .

Torsi yang bekerja pada *chassis* dan pendulum terhadap sumbu  $z$  adalah:

$$J_v \ddot{\psi} = \frac{D}{2} (F_L - F_R) \quad (2.5)$$

dimana  $J_v$  adalah momen inersia dari *chassis* dan pendulum pada sumbu  $z$ ,  $\ddot{\psi}$  adalah percepatan sudut *yaw* robot, dan  $D$  adalah jarak antara roda kiri dan kanan.

Robot pendulum terbalik beroda dua terdiri dari 6 *state* yang didefinisikan dengan vektor  $x(t) = [\phi \ \dot{\phi} \ x \ \dot{x} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$  dimana  $x_1 = \phi$  menyatakan sudut kemiringan pendulum,  $x_2 = \dot{\phi}$  menyatakan kecepatan sudut pendulum yang merupakan turunan pertama dari sudut kemiringan pendulum.  $x_3 = x$  menyatakan posisi robot pada sumbu  $x$  dan  $x_4 = \dot{x}$  menyatakan kecepatan robot pada sumbu  $x$ .  $x_5 = \psi$  menyatakan sudut putar *yaw* dari robot, dan  $x_6 = \dot{\psi}$  menyatakan kecepatan sudut putar *yaw* dari robot. Robot pendulum terbalik beroda dua terdiri dari 2 sinyal masukan kontrol didefinisikan dengan  $u_1 = T_R + T_L$  yang merupakan

torsi total dari kedua motor dan  $u_2 = T_R - T_L$  yang merupakan selisih antara torsi motor kiri dengan torsi motor kanan. Persamaan state dari robot pendulum terbalik beroda dua dinyatakan dengan sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.6)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\Omega_0} \left[ -M_p l \cos(\phi) \left( M_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{u_1}{r} \right) + M_x M_p g l \sin(\phi) \right] \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.8)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\Omega_0} \left[ J_\phi \left( M_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{u_1}{r} \right) - M_p^2 l^2 g \sin(\phi) \cos(\phi) \right] \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{D u_2}{2r J_\psi} \quad (2.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} J_\psi &= J_v + \frac{D^2}{2} \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right) \\ M_x &= M_c + M_p + 2 \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right) \\ J_\phi &= J_p + J_c. \\ \Omega_0 &= M_x J_\phi - M_p^2 l^2 \cos(\phi)^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Penurunan rumus persamaan diferensial dari robot pendulum terbalik beroda dua dapat dilihat pada lampiran A dengan asumsi bahwa friksi roda cukup untuk memutar roda namun tidak mempengaruhi gaya gerak translasi dari robot dan tidak ada slip antara roda dan lantai .

Pada Tugas Akhir ini, parameter-parameter dari robot pendulum terbalik beroda dua mengacu pada [7] dan dapat dilihat pada tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Parameter geometrik robot pendulum terbalik beroda dua

| Parameter   | Simbol   | Nilai | Unit         |
|---|----------|-------|--------------|
| Massa pendulum  | $M_p$    | 9,1   | [Kg]         |
| Massa <i>chassis</i>  | $M_c$    | 25,2  | [Kg]         |
| Massa roda  | $M_w$    | 1     | [Kg]         |
| Panjang antara poros roda dan pusat gravitasi pendulum          | $l$      | 0,5   | [m]          |
| Jari-jari roda  | $r$      | 0,1   | [m]          |
| Jarak antara roda kiri dan kanan                                | $D$      | 0,44  | [m]          |
| Percepatan gravitasi  | $g$      | 9,8   | [ $m/s^2$ ]  |
| Momen inersia dari roda terhadap sumbu y                        | $J_w$    | 1,5   | [ $kg.m^2$ ] |
| Momen inersia dari <i>chassis</i> terhadap sumbu y              | $J_c$    | 2,5   | [ $kg.m^2$ ] |
| Momen inersia dari <i>chassis</i> dan pendulum terhadap sumbu z | $J_\psi$ | 1,5   | [ $kg.m^2$ ] |

## 2.4. Linearisasi

Linearisasi adalah pendekatan linear dari suatu sistem nonlinear pada suatu area yang terbatas disekitar titik operasi. Pada sistem kontrol, titik operasi normal dari sebuah sistem biasanya berada pada sekitar titik ekulibriumnya. Jika sebuah sistem nonlinear beroperasi disekitar sebuah titik ekulibrium dan daerah pergerakan sinyal yang terbatas, maka dimungkinkan untuk melakukan pendekatan sistem linear dari sistem nonlinear. Sistem linear tersebut sama dengan sistem nonlinear hanya saja dengan pergerakan sinyal operasi yang terbatas. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear agar teknik-teknik pengontrolan sistem linear dapat diaplikasikan.

Untuk mendapatkan model matematika linear dari suatu sistem nonlinear, maka anggap variabel-variabel sistem memiliki penyimpangan kecil pada titik operasi tertentu [9]. Misalnya masukan sebuah sistem adalah  $x(t)$  dan keluaranya adalah  $y(t)$ . Maka hubungan antara keduanya adalah

$$y = f(x) \quad (2.13)$$



Jika pada titik kondisi operasi normal direpresentasikan  $\bar{x}$  dan  $\bar{y}$ , maka persamaan (2.12) dapat dikembangkan dalam bentuk deret Taylor menjadi

$$y = f(x) \\ = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (2.14)$$

dimana  $\frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots$  dievaluasi pada  $x = \bar{x}$ . Jika variasi dari  $x - \bar{x}$  bernilai kecil, maka orde tinggi dari persamaan (2.13) dapat diabaikan. Sehingga didapat

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad (2.15)$$

dengan

$$y = f(\bar{x})$$

$$K = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

persamaan (2.14) dapat ditulis dengan sebagai berikut.

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (2.16)$$

persamaan (2.15) mengindikasikan bahwa  $y - \bar{y}$  proporsional terhadap  $x - \bar{x}$ . Persamaan (2.15) merupakan persamaan model matematika linier dari sistem nonlinear dari persamaan (2.12) mendekati titik operasi  $x = \bar{x}$  dan  $y = \bar{y}$ .

Linearisasi model matematika nonlinear dalam bentuk *state space* dilakukan dengan cara mengasumsikan variabel-variabel sistem memiliki penyimpangan kecil pada titik operasinya. Asumsikan sebuah persamaan nonlinear (2.16).

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.17)$$

pada sistem nonlinear *loop* terbuka terdapat *state* sebanyak  $n$ , maka linearisasi sistem pada titik operasi  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n]$ . Untuk melakukan



linearisasi, maka persamaan (2.16) diturunkan pada titik operasinya. Fungsi  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  diturunkan menjadi matriks  $\mathbf{A}$  yang merupakan matriks Jacobi dimana  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  diturunkan terhadap  $\mathbf{x}$  dan  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  diturunkan terhadap  $\mathbf{u}$  menjadi matriks  $\mathbf{B}$ . Sehingga model linear dari persamaan (2.16) dapat direpresentasikan kedalam persamaan (2.17).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.18)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial u_n} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \quad (2.19)$$

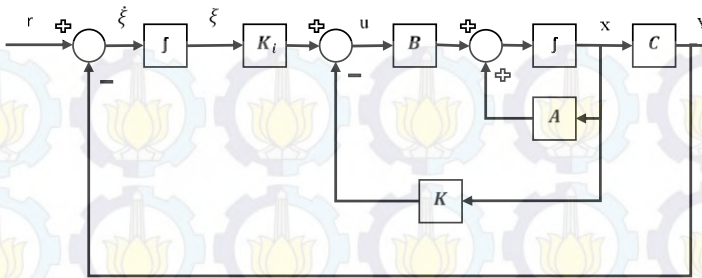
dengan

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

## 2.5. Sistem Servo Tipe 1

Sistem servo merupakan skema kontrol *loop* tertutup dimana keluaran dari sistem diharapkan sama dengan referensi yang diberikan dan keluaran dapat mengikuti perubahan referensi yang diberikan.

Gambar 2.3 merupakan sistem servo tipe 1 apabila *plant* tidak memiliki integrator. Pada sistem ini, integrator diantara pembanding *error* dan pada *plant*. Sistem servo tipe 1 memiliki dua buah *gain* kontroler, yaitu  $\mathbf{K}_i$  dan  $\mathbf{K}$ . Dimana  $\mathbf{K}_i$  merupakan *gain* kompensator integral dan  $\mathbf{K}$  merupakan *gain statefeedback*. Pada tugas akhir ini, nilai *gain* ditentukan dengan metode kontrol optimal *Linear Quadratic Regulator*.



**Gambar 2.3** Sistem Servo Tipe 1 untuk plant tanpa integrator

Dari gambar 2.3, kita bisa dapatkan:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.20)$$

$$y = Cx \quad (2.21)$$

$$u = -Kx + K_i \xi \quad (2.22)$$

$$\xi = r - y = r - Cx \quad (2.23)$$

dimana persamaan (2.20) dan (2.21) merupakan persamaan *plant* dalam bentuk *state space*, persamaan (2.22) merupakan persamaan sinyal kontrol, dan persamaan (2.23) merupakan persamaan *error* dengan  $x$  adalah vektor dari *state*,  $y$  adalah vektor dari keluaran,  $u$  adalah sinyal kontrol,  $r$  merupakan sinyal referensi dan  $\xi$  adalah vektor sinyal error.

Diasumsikan bahwa masukan referensi merupakan fungsi *step* dengan waktu *step*  $t = 0$ , maka untuk  $t > 0$  maka dinamik dari sistem didapat dari menggabungkan persamaaan (2.20) dan (2.23) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.24)$$

Sistem (2.24) didesain agar stabil asimtotik sehingga  $x(\infty)$ ,  $\xi(\infty)$ , dan  $u(\infty)$  masing-masing mendekati suatu nilai konstan. Sehingga pada keadaan tunak kita dapatkan  $\dot{\xi}(t) = 0$  dan  $y(\infty) = r$ . Maka pada keadaan tunak sistem (2.24) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (2.25)$$

Sebelumnya kita asumsikan bahwa  $r$  merupakan sinyal *step* yang berarti bahwa  $r(\infty) = r(t) = r$  bernilai konstan untuk  $t > 0$ . Dengan mengurangi persamaan (2.24) dengan (2.25) didapat

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2.26)$$

dengan

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) - x(\infty) \\ \xi_e(t) &= \xi(t) - \xi(\infty) \\ u_e(t) &= u(t) - u(\infty) = -Kx_e(t) + K_i \xi_e(t) \end{aligned}$$

asumsikan sebuah vektor *error*  $e(t)$  dengan

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

maka persamaan (2.26) dapat ditulis dengan

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (2.28)$$

dengan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

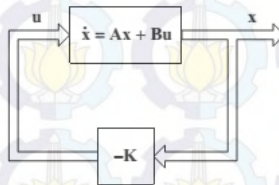
$$u_e = -\hat{K}e \quad (2.29)$$

$$\hat{K} = [K \quad \vdots \quad -K_i] \quad (2.30)$$

Desain dari sistem servo tipe 1 dianalisa seperti desain sistem regulator stabil asimtotik dimana  $e(t)$  akan mendekati nilai 0 pada kondisi awal  $e(0)$  [9]. Pada tugas akhir ini, nilai *gain*  $\hat{K}$  didapat dengan metode kontrol optimal *Linear Quadratic Regulator*.

### 2.5.1. Linear Quadratic Regulator

*Linear Quadratic Regulator* (LQR) merupakan salah satu metode kontrol optimal. Metode kontrol optimal merupakan salah satu metode kontrol modern. Kontroler LQR merupakan kontroler dengan jenis *state feedback gain*, dimana sinyal kontrol yang optimal didapat dari penguatan *state* sistem. Semua *state* dari sistem harus dapat dijadikan umpan balik untuk sistem. Kontroler *Linear Quadratic Regulator* (LQR) bertujuan untuk membuat semua *state* sistem dari tidak sama dengan 0 menjadi sama dengan 0. Untuk mendapatkan respon optimal, maka perlu dicari nilai *gain K*. Skema kontrol LQR dapat dilihat pada gambar 2.4.



**Gambar 2.4** Kontrol *gain state feedback* menggunakan metode LQR

Pada dasarnya, kontrol optimal memberikan solusi untuk menentukan nilai sinyal kontrol  $u(t)$  sehingga indeks performansi dapat dioptimasi. Indeks Performansi adalah kuantitatif performansi dari suatu sistem, penekanan diberikan pada spesifikasi sistem yang diprioritaskan, misalnya *error* dan sinyal kontrol. Indeks performansi dari sistem untuk waktu tak berhingga dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.31)$$

dimana matriks  $Q$  adalah matriks simetris semi-definit positif yang merupakan matriks pembobot *error* dengan dimensi sebesar banyaknya *state* sistem, matriks  $R$  adalah matriks simetris definit positif yang merupakan matriks pembobot masukan kontrol dengan dimensi sebesar banyaknya masukan sistem,  $x$  adalah vektor *state*, dan  $u$  adalah vektor masukan.



Apabila diketahui sebuah persamaan plant seperti persamaan (2.19) dengan

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.32)$$

dimana  $\mathbf{K}$  merupakan matriks *gain statefeedback* dan  $\mathbf{u}(t)$  tidak memiliki batasan (*unconstrained*). Untuk meminimalkan indeks performansi dengan waktu tidak terbatas dari persamaan (2.28). Maka dari persamaan (2.19) dan (2.31) didapat

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (2.33)$$

asumsikan bahwa  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  adalah stabil, atau *eigenvalue* dari  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  memiliki nilai negatif. Substitusi persamaan (2.32) kedalam persamaan (2.31) didapatkan:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (2.34)$$

Asumsikan bahwa

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (2.35)$$

dengan matriks  $\mathbf{P}$  adalah matrik Hermitian definit positif atau matriks *real* simetris. Maka dari persamaan (2.35) dan (2.33) didapat:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} &= -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Membandingkan dari kedua sisi dari persamaan (2.36) didapat

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (2.37)$$

Jika matriks  $A - BK$  stabil, maka akan ada matriks  $P$  definit positif yang sesuai dengan persamaan (2.37)

Indeks performansi dapat dievaluasi dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} \\ &= \mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Karena semua *eigenvalue*  $A - BK$  diasumsikan memiliki nilai *real* negatif maka nilai  $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$ . Maka kita dapatkan:

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (2.39)$$

Maka nilai indeks performansi didapatkan dari nilai kondisi awal *state* atau  $\mathbf{x}(0)$  dan matriks  $P$ .

Matriks  $R$  diasumsikan matriks Hermitian definit positif atau matriks simetris *real*. Maka matriks  $R$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (2.40)$$

dimana  $T$  merupakan matriks *nonsingular*. Maka persamaan (2.37) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

atau bisa ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \\ - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Untuk meminimalkan indeks performansi  $J$  terhadap  $K$  maka perlu meminimalkan dari persamaan berikut:

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x} \quad (2.43)$$

Karena persamaan (2.34) adalah non negatif, nilai minimum didapat ketika persamaan itu bernilai 0 atau ketika

$$TK = (T^T)^{-1}B^T P$$

maka

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P = R^{-1}B^T P \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) menghasilkan matriks *gain*  $K$  optimal. Maka kontrol optimal dimana indeks performansinya sesuai dengan persamaan (2.31) adalah linear dan dapat ditulis sebagai:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (2.45)$$

Untuk mendapatkan nilai  $K$ , maka harus mencari nilai matriks  $P$  terlebih dahulu. Matriks  $P$  adalah matriks simetris semi-definit positif yang didapatkan dari penyederhanaan persamaan (2.37) atau disebut *Algebraic Riccati Equation* (ARE) berikut ini:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.46)$$

Setelah matriks  $P$  didapat maka nilai  $K$  dapat dicari melalui persamaan (2.44).

Pada Tugas Akhir ini, skema kontrol yang digunakan adalah sistem servo tipe 1. Indeks performansi dari sistem servo tipe 1 dapat ditulis sebagai berikut

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (2.47)$$

maka untuk mencari nilai *gain*  $\hat{K}$  yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya, dibentuk matriks augmentasi seperti pada persamaan (2.27). Kemudian dicari  $P$  menggunakan persamaan ARE seperti pada persamaan (2.46). Persamaan ARE untuk sistem servo tipe 1 dapat ditulis menjadi

$$\hat{A}^T P + P\hat{A} - P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^T P + \hat{Q} = 0 \quad (2.48)$$

dimana matriks  $\hat{Q}$  memiliki dimensi sebesar banyaknya *state* sistem ditambah dengan keluaran sistem (matriks  $C$ ). Setelah didapatkan matriks  $P$ , lalu dicari matriks  $\hat{K}$  menggunakan persamaan (2.44) menjadi

$$\hat{K} = R^{-1} \hat{B}^T P \quad (2.49)$$

maka nilai *gain*  $\hat{K}$  dapat dipisahkan seperti pada persamaan (2.30).





## BAB 3

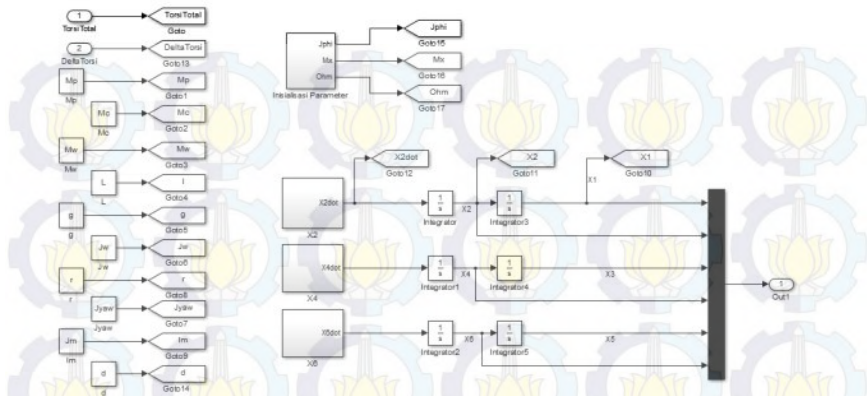
### PERANCANGAN SISTEM

Bab ini membahas tentang perancangan sistem kontrol Robot pendulum terbalik beroda dua. Bagian awal membahas tentang pemodelan sistem robot pendulum terbalik beroda dua. Pemodelan sistem dibuat berdasarkan persamaan fisika dari robot dan masih bersifat nonlinear. Untuk mendapatkan model linear, maka perlu dilakukan linearisasi titik operasi disekitar titik ekulibrium. Kemudian sistem servo tipe 1 dirancang dengan parameter model linear hasil linearisasi. *Gain* kontroler pada sistem servo tipe 1 didapat dari menggunakan metode kontrol optimal LQR. Hasil dari perancangan sistem kontrol disimulasikan pada laboratorium virtual.

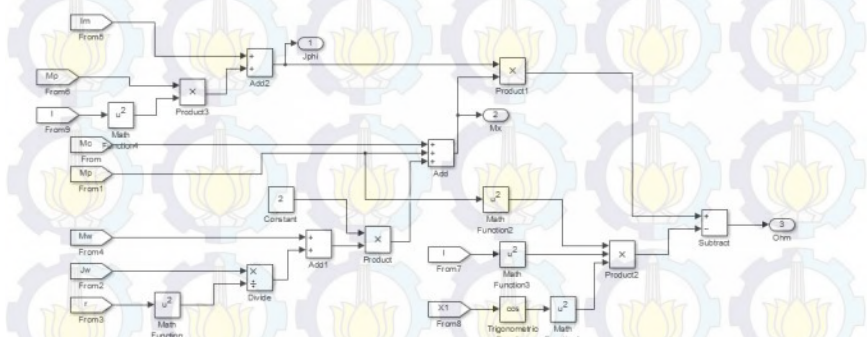
#### 3.1. Pemodelan Sistem Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua

Model matematika Robot pendulum terbalik beroda dua telah dibahas pada subbab 2.3 dimana robot pendulum terbalik beroda dua memiliki 6 state yaitu  $\mathbf{x}(t) = [\phi \ \dot{\phi} \ x \ \dot{x} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ . State dari sistem juga telah dijabarkan pada persamaan (2.6) hingga persamaan (2.11). Selanjutnya persamaan-persamaan tersebut ditambah dengan persamaan (2.12) ditransformasikan kedalam diagram *Simulink* untuk keperluan simulasi sistem kontrol.

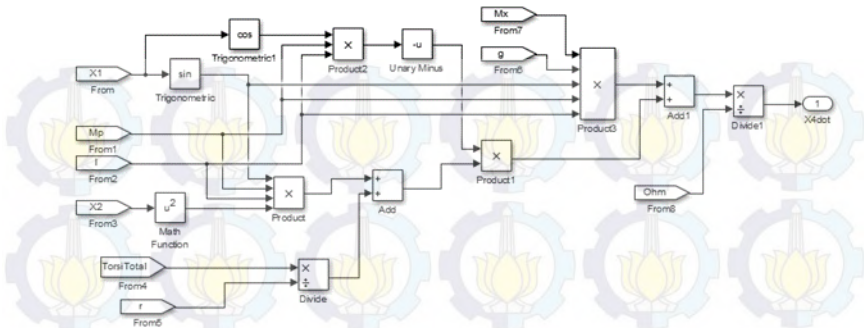
Pada tugas akhir ini, dibuat empat subsistem yang terdiri dari Inisialisasi Parameter,  $X_2$ ,  $X_4$ , dan  $X_6$ . Inisialisasi Parameter dibuat berdasarkan persamaan (2.12),  $X_2$  dibuat berdasarkan persamaan (2.7),  $X_4$  dibuat berdasarkan persamaan (2.9), dan  $X_6$  dibuat berdasarkan persamaan (2.11). keempat subsistem tersebut merupakan model matematika nonlinear merepresentasikan dari robot pendulum terbalik beroda dua. Model yang dibuat digunakan untuk keperluan linearisasi menggunakan *syntax* `linmod2` menggunakan aplikasi MATLAB yang selanjutnya akan dibahas lebih lanjut pada subbab berikutnya dan untuk keperluan simulasi menggunakan kontroler telah dirancang.



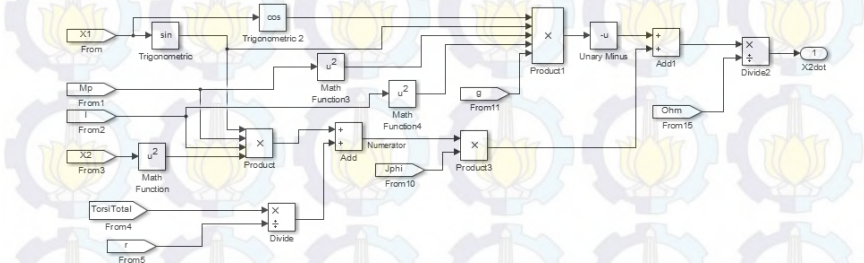
**Gambar 3.1** Diagram *Simulink* untuk model robot pendulum terbalik beroda dua



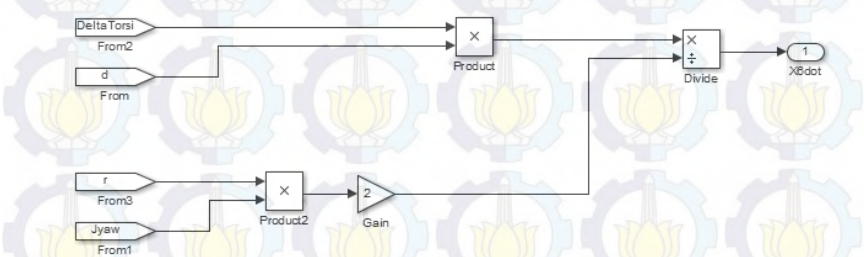
**Gambar 3.2** Diagram *Simulink* untuk subsistem Inisialisasi Parameter



Gambar 3.3 Diagram Simulink untuk subsystem  $X_2$



Gambar 3.4 Diagram Simulink untuk subsystem  $X_4$



Gambar 3.5 Diagram Simulink untuk subsystem  $X_6$

### 3.2 Linearisasi Model Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua

Persamaan *state space* dari Robot pendulum terbalik beroda dua pada tugas akhir ini dijelaskan pada persamaan (2.6) hingga persamaan (2.11) dimana terdiri dari 6 *state*.



Metode linearisasi untuk persamaan nonlinear telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 2.4 persamaan (2.16). Jika persamaan (2.16) diaplikasikan pada persamaan nonlinear dari Robot pendulum terbalik beroda dua yang digunakan dalam tugas akhir ini, maka persamaan linear dari Robot dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial x_6} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_6(x,u)}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \quad (3.2)$$

untuk mendapatkan matriks  $\mathbf{A}$  maka perlu ditinjau elemen-elemen pada matriks  $\mathbf{A}$  setiap barisnya. Pada baris pertama dimana fungsi dari  $f_1(x)$

merupakan fungsi *state*  $\dot{x}_1$  dimana  $\dot{x}_1 = x_2$  seperti pada persamaan (2.6). Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris pertama adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= 1, & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_5} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Fungsi dari  $f_2(x)$  adalah fungsi *state*  $\dot{x}_2$  yang ada pada persamaan (2.7). Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris kedua adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= \frac{1}{\Omega_0} \left[ ml \sin(\phi) \left( ml \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{u_1}{R} \right) \right. \\ &\quad \left. - ml \cos(\phi) \left( ml \cos(\phi) \dot{\phi}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2ml \sin(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi} \right) + M_x g l \cos(\phi) \right], \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_5} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_6} &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Fungsi dari  $f_3(x)$  adalah fungsi *state*  $\dot{x}_3$  yang ada pada persamaan (2.8) dimana  $\dot{x}_3 = x_4$ . Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris ketiga adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_4} &= 1, \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_5} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_6} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Fungsi dari  $f_4(x)$  adalah fungsi *state*  $\dot{x}_4$  yang ada pada persamaan (2.9). Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris keempat adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1} &= \frac{1}{\Omega_0} [J_\phi (ml \cos(\phi) \dot{\phi}^2 + 2ml \sin(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi}) \\ &\quad - m^2 l^2 g \cos(\phi)^2 + m^2 l^2 g \sin(\phi)^2] , \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_5} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_6} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Fungsi dari  $f_5(x)$  adalah fungsi *state*  $\dot{x}_5$  yang ada pada persamaan (2.10) dimana  $\dot{x}_5 = x_6$ . Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris ketiga adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_5} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_6} = 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fungsi dari  $f_6(x)$  adalah fungsi *state*  $\dot{x}_6$  yang ada pada persamaan (2.11). Turunan dari masing-masing elemen yang ada pada baris keempat adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_5} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_6} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Matriks **B** berbentuk vektor dan didapatkan dari penurunan  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$ , dan  $f_6(x)$  terhadap  $u_1$  dan  $u_2$ . Elemen-elemen dari matriks **B** adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u_1} = -\frac{ml \cos(\phi)}{R\Omega_0}, \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial u_1} = \frac{J_\phi}{R\Omega_0}, \\ \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial u_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u_2} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial u_2} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial u_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial u_2} &= \frac{D}{2RJ_\psi}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Titik operasi yang digunakan untuk linearisasi adalah pada titik ekulibrium robot dengan  $\mathbf{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  dan  $\mathbf{u} = [0 \ 0]^T$ . Dengan bantuan program MATLAB dengan *syntax* `linmod2` dan memasukkan nilai parameter robot yang ada pada tabel 2.1 dan dilinearikan pada titik ekulibrium maka didapat model linear *state space* sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9,4602 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,1280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0287 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0144 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1,4667 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Program untuk mencari nilai matriks  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  dapat dilihat pada lampiran B.

Pada tugas akhir ini, *state*  $x$  dan  $\psi$  yang akan dikontrol untuk mendekati sinyal referensi. Maka matriks  $\mathbf{C}$  dan  $\mathbf{D}$  sama dengan berikut:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.12)$$

### 3.3 Sistem Servo Tipe 1

Pada subbab ini membahas tentang kontrol sistem servo tipe 1. Sistem servo tipe 1 digunakan untuk keperluan *tracking* posisi dan sudut *yaw*. Nilai dari *gain* kontroler didapat dari metode kontrol optimal LQR.



Hal yang pertama dilakukan adalah pembentukan matriks augmentasi  $\hat{\mathbf{A}}$  dan  $\hat{\mathbf{B}}$  sesuai dengan persamaan (2.27). maka matriks  $\hat{\mathbf{A}}$  dan  $\hat{\mathbf{B}}$  untuk tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9,4602 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0287 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0144 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1,4667 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pada tugas akhir ini, matriks  $\hat{\mathbf{Q}}$  dan  $\mathbf{R}$  ditentukan dengan cara *trial and error* dengan syarat matriks merupakan matriks simetris semi definit positif untuk  $\hat{\mathbf{Q}}$  dan matriks simetris definit positif untuk  $\mathbf{R}$ . Matriks  $\hat{\mathbf{Q}}$  dan  $\mathbf{R}$  yang digunakan pada tugas akhir ini adalah:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^6 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Menggunakan persamaan ARE yang ada pada persamaan (2.46) maka akan didapat matriks  $P$ . Setelah matriks  $P$  diketahui maka kita bisa menghitung nilai *gain* kontrol  $\hat{K}$  dengan menggunakan persamaan (2.49). Pada tugas akhir ini, matriks  $\hat{K}$  dihitung menggunakan bantuan program MATLAB dengan *syntax* `lqr` (Lampiran B) dengan nilai  $\bar{Q}$  dan  $R$  sesuai dengan persamaan (3.15) kemudian didapat:

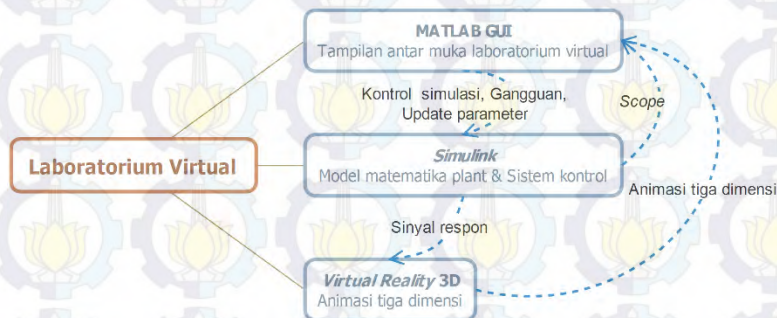
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -2089 & 0 \\ -601,19 & 0 \\ -322,29 & 0 \\ -469,37 & 0 \\ 0 & 179,99 \\ 0 & 15,69 \\ \dots & \dots \\ 100 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

Sesuai dengan persamaan (2.29) maka,

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} -2089 & 0 \\ -601,19 & 0 \\ -322,25 & 0 \\ -469,37 & 0 \\ 0 & 179,99 \\ 0 & 15,7 \end{bmatrix}^T \\ K_i &= \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.4 Perancangan Laboratorium Virtual

Untuk menguji sistem kontrol hasil perancangan pada tugas akhir ini maka dibuat laboratorium virtual menggunakan *Simulink*, MATLAB GUI, dan *Virtual Reality* 3D yang saling terintegrasi satu sama lain untuk keperluan simulasi. *Virtual Reality* 3D yang merupakan animasi 3D berbasis VRML (*Virtual Reality Modelling Language*). Simulasi dilakukan untuk mengetahui sinyal respon dari sistem dengan skema kontrol yang telah dirancang sebelumnya. Pembuatan GUI dan *Virtual Reality* 3D dibuat berdasarkan tugas akhir sebelumnya [4].



**Gambar 3.6** Integrasi MATLAB GUI, *Simulink*, dan *Virtual Reality* 3D pada laboratorium virtual

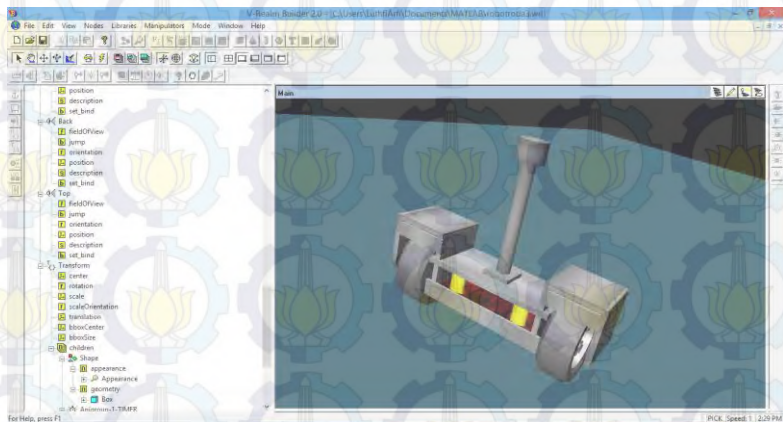
Gambar 3.6 menjelaskan dari integrasi dari tiga program dari aplikasi MATLAB. MATLAB GUI digunakan sebagai tampilan antar muka dari laboratorium virtual dimana dari GUI, pengguna dapat mengontrol simulasi, gangguan, dan *update* parameter dari sistem kontrol yang terdapat pada program *simulink*. Pengguna dapat menampilkan *Scope* yang ada pada *simulink*. *Simulink* digunakan untuk mensimulasikan dari sistem kontrol yang dirancang kedalam model matematika yang merepresentasikan robot pendulum terbalik beroda dua. Sinyal respon dari hasil simulasi diteruskan kedalam *Virtual Reality* 3D sehingga animasi dari robot pendulum terbalik beroda dua dapat bergerak sesuai dengan sinyal respon hasil simulasi program *simulink*.

Tampilan antar muka dari laboratorium virtual dibuat dengan menggunakan GUI dan untuk *Virtual Reality* 3D dibuat menggunakan *V-Realm Builder 2.0*. Pada GUI terdiri dari beberapa *editbox*, *slider*, dan *push button* yang akan berkaitan langsung dengan parameter-parameter yang ada pada program *simulink*.



### 3.4.1 Perancangan *Virtual Reality* 3D

Perancangan *Virtual Reality* 3D pada tugas akhir ini menggunakan program *V-Realm Builder*. Program tersebut sudah disediakan oleh aplikasi MATLAB. Program ini menggunakan bahasa VRML dengan file ekstensi '.wrl' dimana VRML merupakan bahasa pemrograman untuk mendesain animasi grafis tiga dimensi berbasis vektor. Tampilan dari program *V-Realm Builder* dapat dilihat pada gambar 3.7.



**Gambar 3.7** Tampilan dari *V-Realm Builder* dengan sudut pandang *Follow*

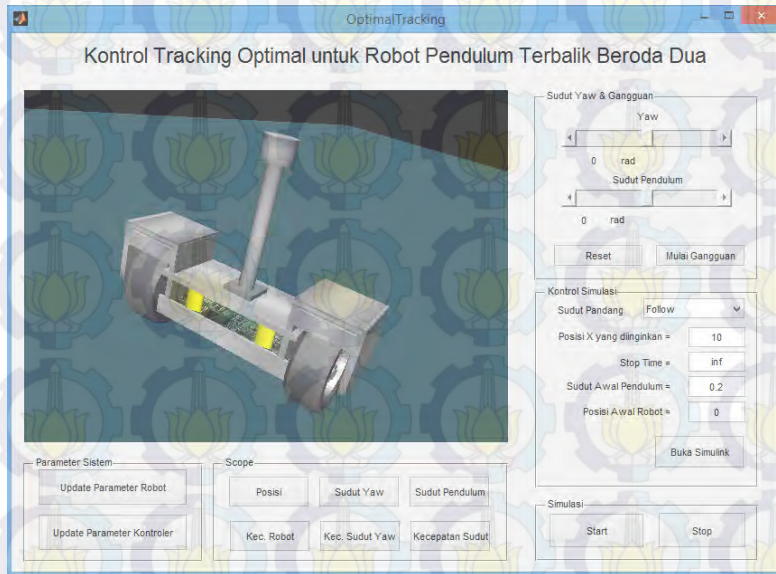
### 3.4.2 Perancangan MATLAB GUI

Pada tampilan antar muka laboratorium virtual, pengguna dapat mengatur kontrol dari simulasi robot pendulum terbalik beroda dua. Dapat dilihat dari gambar 3.8 dimana pada GUI laboratorium virtual terdapat *group panel* untuk kontrol sudut *Yaw* & Gangguan, kontrol simulasi, parameter sistem, *scope*, dan Simulasi.

Panel kontrol sudut *Yaw* & Gangguan digunakan untuk mengatur gangguan pada sudut pendulum atau *state*  $X_1$  dan sudut *yaw*. Pengaturan sudut *yaw* digunakan untuk mengatur sudut *yaw* dari robot dengan mengubah nilai referensi dari sudut *yaw* robot dengan cara menggeser dari *slider* *Yaw*. Besarnya gangguan diberikan kedalam *state*  $X_1$  diubah dengan menggeser dari *slider* Sudut Pendulum. Untuk memberikan gangguan kedalam robot dilakukan dengan menekan tombol mulai gangguan. Tombol *Reset* digunakan untuk mengembalikan nilai referensi



dari sudut *yaw* dan gangguan sudut pendulum ke nilai 0. Pemberian gangguan hanya dapat dilakukan ketika simulasi pada *simulink* sedang berjalan.



**Gambar 3.8** Tampilan dari laboratorium virtual dengan sudut pandang *Follow*

Panel kontrol Parameter Sistem digunakan untuk memperbaharui dari paramter-parameter sistem kontrol yang ada pada simulink. *Update* Parameter Robot digunakan untuk mengubah parameter dari robot sehingga besarnya *gain* kontrol berubah sesuai dengan perubahan parameter robot. Selanjutnya untuk *Update* Paramter Kontroler digunakan untuk mengubah matriks pembobot  $Q$  dan  $R$  yang nantinya akan merubah nilai *gain* dari sistem kontrol.

Panel Kontrol Simulasi digunakan untuk mengontrol simulasi dari program *simulink* dan *Virtual Reality* 3D. Menu sudut pandang dibuat dalam bentuk menu *drop down list* dengan pilihan *Side*, *Top*, *Back*, dan *Follow* dimana digunakan untuk mengubah sudut pandang dari tampilan *Virtual Reality* 3D. Tampilan *Side* akan menampilkan robot dari sisi kanan robot, *Top* menampilkan dari sisi atas robot, *Back* menampilkan dari sisi belakang robot, dan *Follow* menampilkan dari sisi belakang robot

secara lebih dekat dan mengikuti pergerakan dari robot. Menu Posisi X yang diinginkan digunakan untuk merubah referensi dari posisi robot pada sumbu x yang diinginkan pada *simulink* sesuai dengan masukan dari pengguna pada kolom *edit box*. Menu *Stop Time* digunakan untuk mengontrol waktu stop dari simulasi *simulink*. Menu Sudut Awa; Pendulum dan Posisi Awal Robot mengatur sudut awal dan posisi awal robot sebelum simulasi dimulai. Tombol Buka *Simulink* digunakan untuk membuka program *simulink* yang digunakan pada laboratorium virtual.

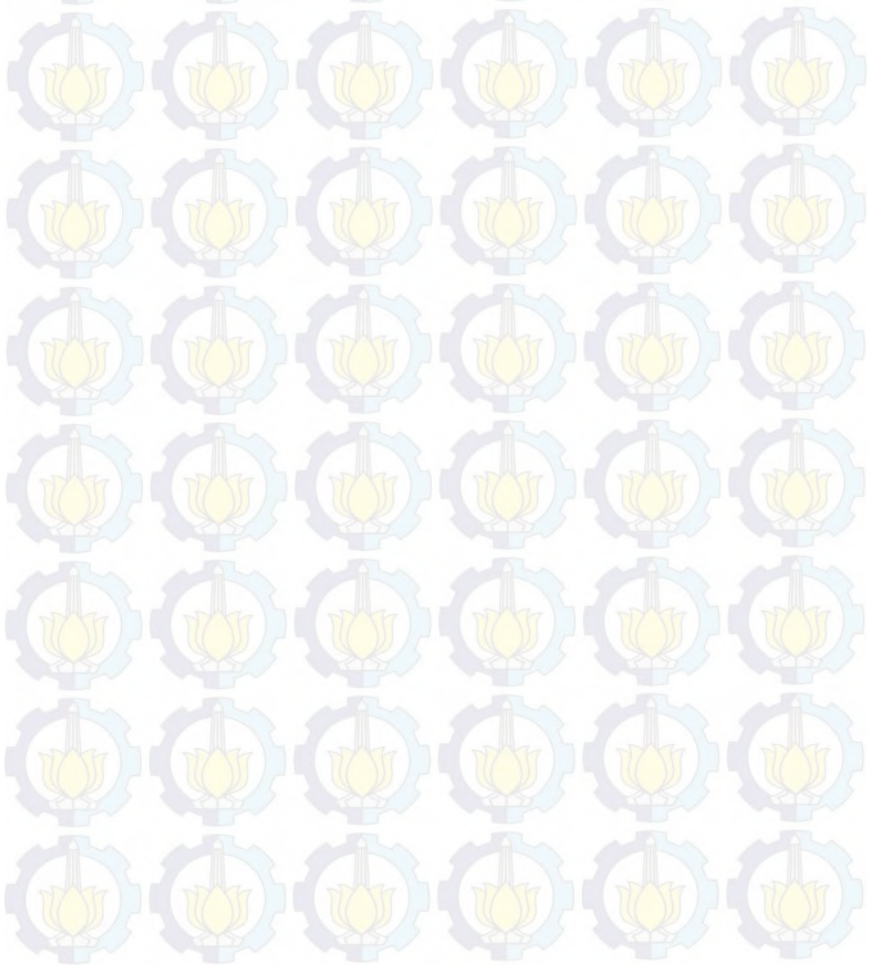
Panel *Scope* merupakan grup dari tombol-tombol yang digunakan untuk membuka blok *scope* yang ada pada *simulink*. Diagram program *simulink* dapat dilihat pada gambar 3.9. Tombol posisi akan membuka blok *scope* TrackX dan menampilkan sinyal referensi dari robot dan respon posisi robot. Tombol Kec. Robot akan membuka blok X4 dan menampilkan sinyal respon dari kecepatan robot. Tombol Sudut Yaw akan membuka blok Yaw dan menampilkan sinyal referensi dari sudut yaw dan respon sudut yaw dari robot. Tombol Kec. Sudut Yaw akan membuka blok X6 dan menampilkan sinyal respon dari kecepatan sudut yaw robot. Tombol Sudut Pendulum akan membuka blok X1 dan menampilkan sinyal respon dari sudut pendulum robot. Tombol Kecepatan Sudut akan membuka blok X2 dan menampilkan sinyal respon dari kecepatan sudut pendulum.

Panel Simulasi terdiri dari dua buah tombol yaitu tombol *Start* dan tombol *Stop*. Tombol *Start* digunakan untuk memulai simulasi dan tombol *Stop* digunakan untuk menghentikan simulasi.

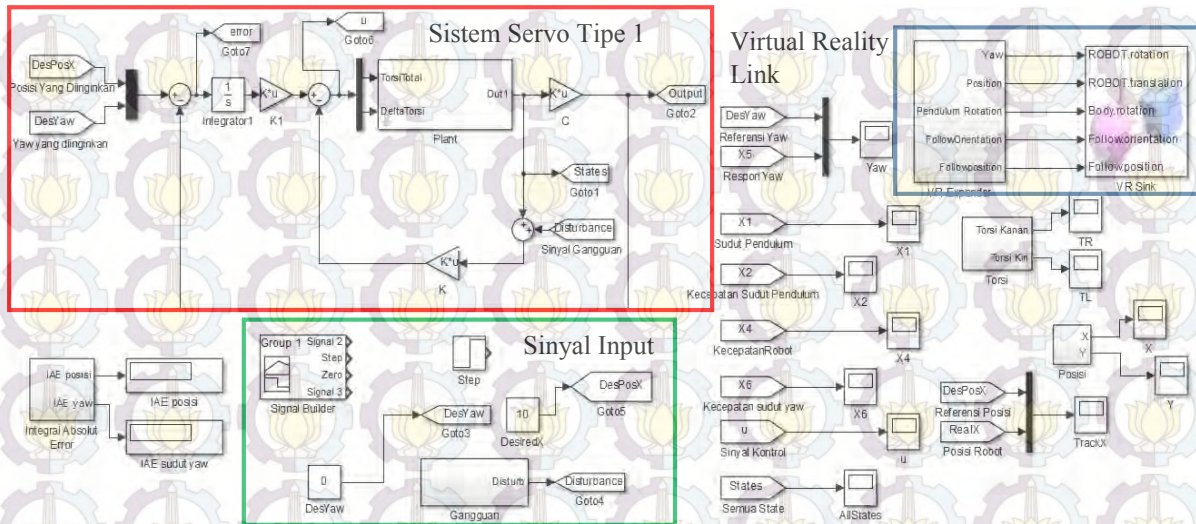
### **3.4.3 Perancangan Simulink**

Simulink merupakan salah satu program dari aplikasi MATLAB yang digunakan untuk pemodelan dan simulasi berbasis blok-blok program. Perancangan dari program simulink yang dirancang pada tugas akhir ini dapat dilihat pada gambar 3.9 dimana dari gambar tersebut dapat dijelaskan bahwa dalam program *simulink* yang dibuat terdiri dari tiga bagian utama yaitu, bagian sistem servo tipe 1, bagian sinyal input, dan bagian *Virtual Reality Link*. Bagian sistem servo tipe 1 berfungsi untuk mensimulasikan sistem robot pendulum terbalik beroda dua dengan parameter yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya. Bagian sinyal input berfungsi untuk memasukkan nilai referensi dari posisi, sudut yaw, dan besarnya amplitudo sinyal gangguan yang akan diberikan kepada sudut pendulum. Bagian *Virtual Reality Link* digunakan untuk mengkondisikan sinyal keluaran dari sistem kontrol agar animasi dari

*Virtual Reality* 3D dapat bergerak sesuai dengan sinyal respon dari sistem kontrol. Blok *VR Sink* digunakan untuk menghubungkan antara sinyal respon hasil simulasi didalam *simulink* dengan *Virtual Reality* 3D. Selain ketiga hal tersebut, dibuat juga blok diagram untuk menghitung indeks performansi untuk *tracking* posisi dan sudut *yaw* dari robot menggunakan *integral absolute error* dan ditampilkan pada blok *display*.







Gambar 3.9 Diagram *Simulink* untuk simulasi





## BAB 4

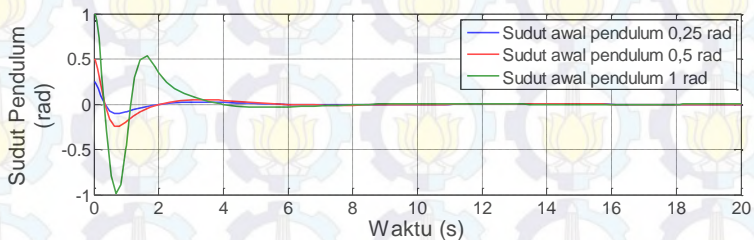
### SIMULASI DAN ANALISA DATA

Bab ini membahas tentang hasil dari simulasi sistem kontrol robot pendulum terbalik beroda dua dan analisa dari hasil simulasi berdasarkan sistem kontrol telah dibuat sesuai dengan yang telah dijelaskan sebelumnya pada Bab 3.

#### 4.1. Simulasi dengan Sudut Awal Pendulum yang Berbeda

Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui seberapa besar penyimpangan dari sudut pendulum robot yang dapat ditoleransi oleh kontroler yang telah dirancang yang sebelumnya telah dijelaskan pada subbab 3.3. Skema kontrol servo tipe 1 merupakan skema kontrol untuk model linear sedangkan robot pendulum terbalik beroda dua merupakan *plant* nonlinear.

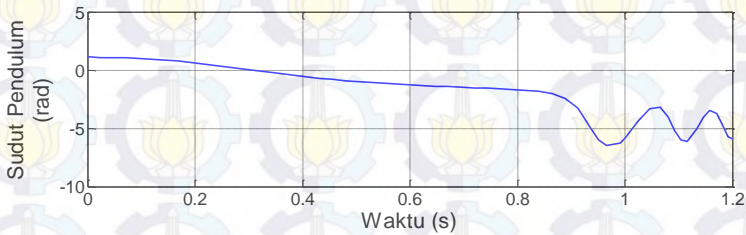
Simulasi dilakukan dengan menggunakan sudut awal pendulum yang berbeda-beda. Simulasi dilakukan sebanyak empat kali dengan sudut awal pendulum masing-masing simulasi adalah 0,25 rad, 0,5 rad, 1 rad, dan 1,1 rad. Keempat simulasi dilakukan dengan referensi posisi robot pada 0 m dan sudut *yaw* robot pada 0 rad.



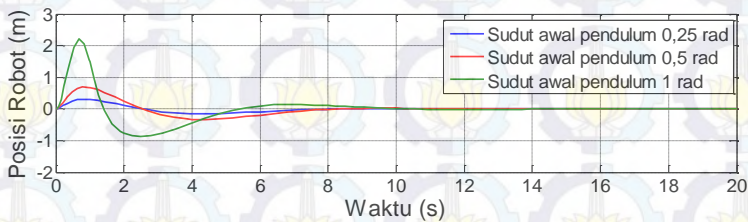
**Gambar 4.1** Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal pendulum 0,25 rad, 0,5 rad, dan 1 rad.

Dari gambar 4.1 dapat disimpulkan bahwa semakin besar sudut awal pendulum maka semakin besar sudut pendulum maka semakin besar *overshoot* respon sudut pendulum yang dihasilkan. Dari hasil ketiga simulasi yang dilakukan, sudut pendulum robot dapat stabil atau memiliki waktu tunak yang tidak terlalu berbeda yaitu pada sekitar  $\pm 3$  detik. Selanjutnya pada simulasi dimana sudut awal pendulum sebesar 1,1 rad

kontroler tidak mampu menstabilisasi dari sudut pendulum robot. Respon dari sudut pendulum robot dengan sudut awal pendulum sebesar 1,1 rad dapat dilihat pada gambar 4.2.



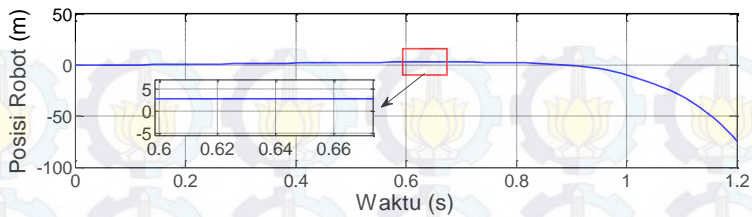
**Gambar 4.2** Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal pendulum 1,1 rad



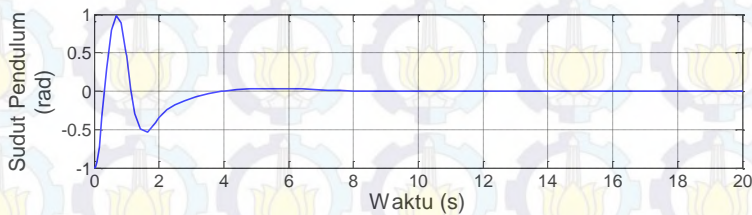
**Gambar 4.3** Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan sudut awal pendulum 0,25 rad, 0,5 rad, dan 1 rad.

Gambar 4.3 merupakan pergerakan posisi robot pada sumbu x dimana dapat dilihat bahwa semakin besar simpangan dari sudut pendulum robot maka ruang pada sumbu x yang digunakan robot untuk melakukan stabilisasi robot pendulum terbalik beroda dua juga semakin besar. Dari gambar 4.4 dapat dilihat bahwa robot bergerak tidak terkendali pada arah sumbu x negatif dikarenakan kontroler gagal untuk melakukan stabilisasi dari pendulum robot pada sudut 0 radian.

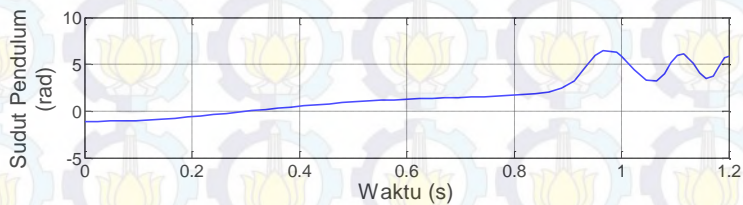
Selanjutnya dilakukan simulasi pada sudut awal pendulum -1 rad dan -1,1 rad. Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui batasan minimum kemampuan kontroler dalam melakukan stabilisasi sudut pendulum apabila sudut pendulum bernilai negatif.



**Gambar 4.4** Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan sudut awal pendulum 1,1 rad.



**Gambar 4.5** Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal pendulum -1 rad



**Gambar 4.6** Pergerakan sudut pendulum dengan sudut awal pendulum -1,1 rad

Dari hasil simulasi dengan sudut pendulum awal negatif dapat disimpulkan bahwa kontroler mampu untuk menstabilkan sudut pendulum pada sudut awal pendulum -1 rad (gambar 4,2) namun tidak mampu untuk menstabilkan sudut pendulum pada sudut awal pendulum -1,1 rad.

Dari hasil pengujian simulasi dengan sudut awal yang berbeda dapat diambil kesimpulan bahwa sistem kontrol yang dirancang hanya mampu melakukan stabilisasi sudut pendulum apabila sudut pendulum berada pada rentang sinyanya  $-1 \leq \phi \leq 1$  radian atau pada pergerakan sudut



pendulum yang terbatas. Hal ini dikarenakan kontroler yang digunakan adalah kontroler linear sedangkan robot pendulum terbalik beroda dua bersifat nonlinear. Selain itu, semakin besar sudut awal pendulum robot maka semakin besar juga ruang sudut pergerakan pendulum. Tabel 4.1 menjelaskan hasil dari simulasi dengan sudut awal pendulum yang berbeda

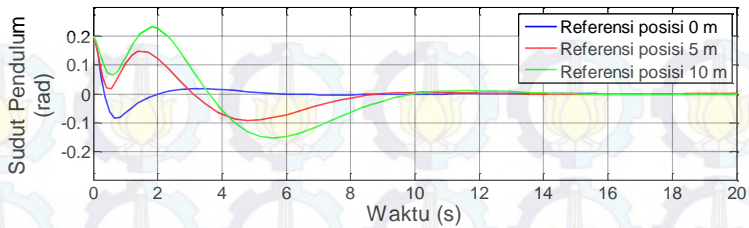
**Tabel 4.1** Hasil respon sudut pendulum robot pada percobaan dengan sudut awal pendulum yang berbeda

| Sudut Awal Pendulum (rad) | Minimum Undershoot (rad) | Waktu Tunak (s) |
|---------------------------|--------------------------|-----------------|
| 0,25                      | -0,1                     | ±3              |
| 0,5                       | -0,25                    | ±5              |
| 1                         | -0,98                    | ±7              |
| 1,1                       | Tidak Stabil             | -               |
| -1                        | 0,98                     | ±7              |
| -1,1                      | Tidak Stabil             | -               |

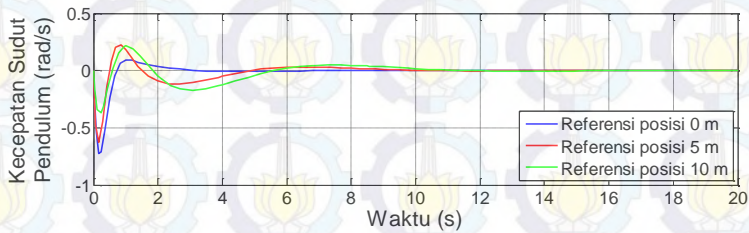
## 4.2. Simulasi dengan Referensi Posisi yang Berbeda

Pengujian ini dilakukan untuk melihat respon dari enam *state* dari robot pendulum terbalik beroda dua yang menggunakan skema kontrol sistem servo tipe 1. Pengujian dilakukan dengan nilai awal dari enam *state* robot adalah  $x_0 = [0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  yang artinya adalah sudut kemiringan pendulum robot pada keadaan awal sebesar 0,2 rad. Pengujian dilakukan sebanyak 3 kali dengan referensi posisi dari robot yang diinginkan berada pada 0 m, 5 m, dan 10 m dimana referensi sudut *yaw* pada 0 radian pada kedua pengujian. Gambar 4.7 hingga 4.11 merupakan hasil respon dan sinyal kontrol dari simulasi ini.

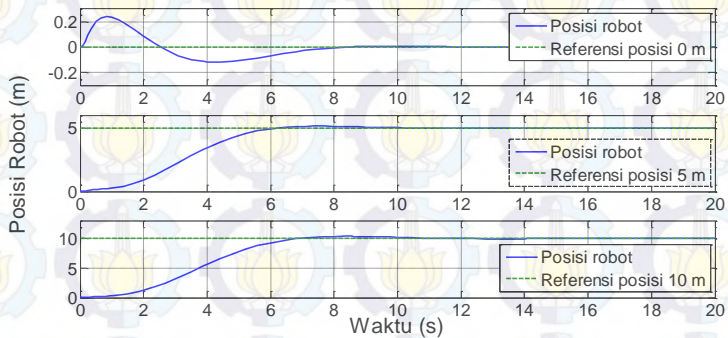
Tujuan dari pengujian ini adalah untuk mengetahui bahwa robot tidak hanya dapat melakukan *tracking* ke posisi awal saja tetapi juga ke posisi yang diinginkan dengan tetap menjaga sudut pendulum pada 0 radian. Hasil dari simulasi dengan referensi posisi yang berbeda dapat dilihat pada tabel 4.2.



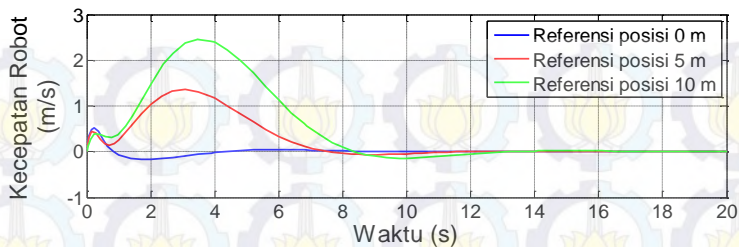
**Gambar 4.7** Pergerakan sudut pendulum robot dengan referensi posisi yang berbeda



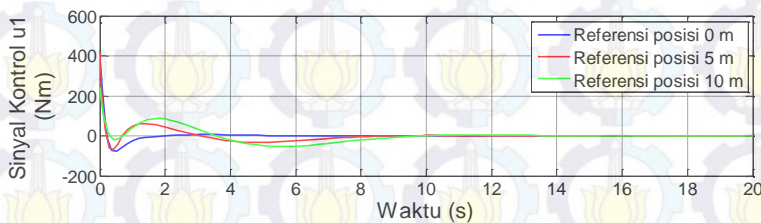
**Gambar 4.8** Kecepatan sudut pendulum robot dengan referensi posisi yang berbeda



**Gambar 4.9** Pergerakan posisi robot pada sumbu x dengan referensi posisi yang berbeda



**Gambar 4.10** Kecepatan robot pada sumbu x dengan referensi posisi yang berbeda



**Gambar 4.11** Sinyal kontrol  $u_1$  roda robot dengan referensi posisi yang berbeda

Pada pengujian sistem kontrol dengan kondisi tanpa kontrol yaw, sinyal kontrol  $u_2$  bernilai 0 karena apabila dilihat dari matriks  $B$  pada persamaan (3.11) dimana kolom dua matriks tersebut memiliki nilai tidak sama dengan 0 hanya pada baris keenam yang mengindikasikan bahwa sinyal kontrol  $u_2$  hanya berpengaruh terhadap *state*  $X_5$  (sudut yaw) dan *state*  $X_6$  (kecepatan sudut yaw).

**Tabel 4.2** Hasil respon sudut pendulum robot dan posisi robot pada sumbu x pada percobaan dengan referensi posisi yang berbeda

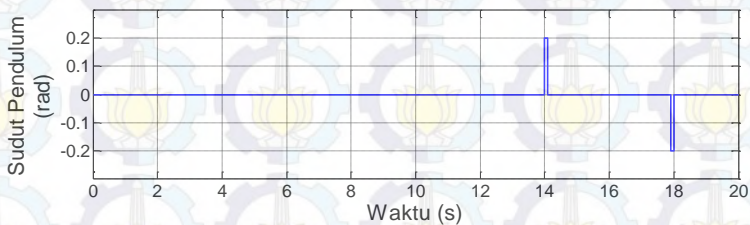
| Referensi Posisi (m) | Sudut Pendulum           |                 | Posisi Robot           |                 | Integral Absolute Error |
|----------------------|--------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|-------------------------|
|                      | Minimum Undershoot (rad) | Waktu Tunak (s) | Maksimum Overshoot (m) | Waktu Tunak (s) |                         |
| 0                    | -0,083                   | ±5              | 0,241                  | ±8              | 1,378                   |
| 5                    | -0,092                   | ±8,5            | 5,137                  | ±6              | 19,35                   |
| 10                   | -1,537                   | ±11             | 10,35                  | ±6,5            | 38,8                    |



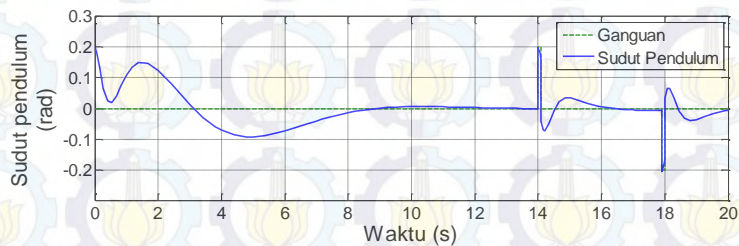
Dari hasil simulasi, skema sistem kontrol yang dirancang mampu untuk membuat sudut pendulum robot tegak pada 0 radian dan robot dapat melakukan *tracking* posisi dan sudut *yaw* dengan baik sesuai dengan sinyal referensi yang diberikan. Dari gambar 4.7 dapat dilihat bahwa besarnya pergerakan sudut pendulum berbanding lurus dengan jarak antara posisi robot dengan referensi tujuan posisi robot. Hal ini dikarenakan pergerakan robot pada sumbu x akan memberikan gaya kepada pendulum sehingga sudut pendulum akan bergeser.

### 4.3. Simulasi dengan Gangguan

Pengujian ini dilakukan dengan metode yang sama seperti yang telah dijelaskan pada subbab 4.2 dengan referensi posisi pada 5 m di sumbu x dan ditambahkan gangguan berupa sinyal yang ada seperti pada gambar 4.12 dimana sinyal gangguan berupa pergeseran sudut pendulum dari robot dan diberikan pada saat detik ke 16 dan ke 18 pada saat robot pendulum terbalik beroda dua telah dalam kondisi stabil berdasarkan pengujian sebelumnya.

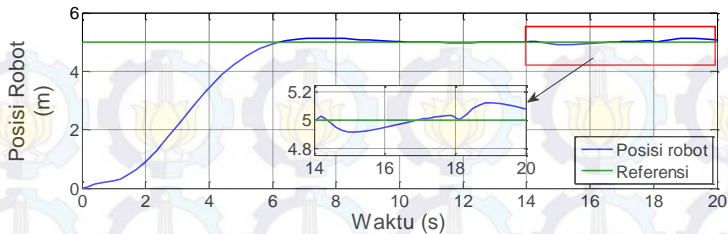


**Gambar 4.12** Sinyal gangguan pada sudut pendulum



**Gambar 4.13** Pergerakan sudut pendulum robot dengan gangguan



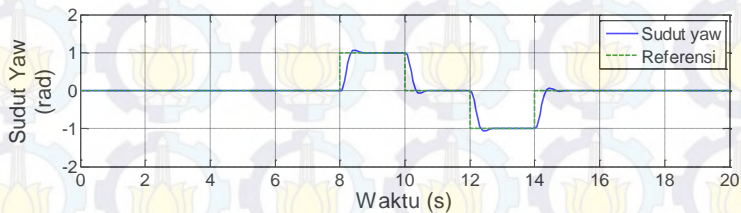


**Gambar 4.14** Posisi robot dengan gangguan

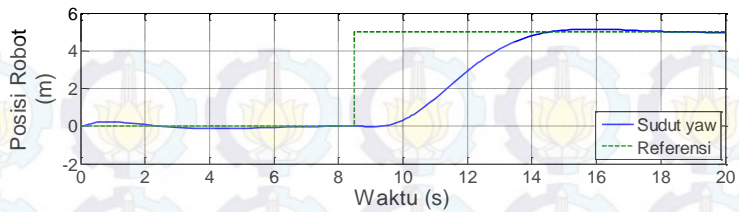
Gambar 4.13 merupakan respon dari sudut pendulum dimana robot dapat dilihat bahwa robot bisa kembali stabil setelah diberikan gangguan pada sudut pendulum. Dari gambar 4.14 dapat dilihat pada saat robot diberikan gangguan, posisi robot akan bergerak maju mundur  $\pm 0,1$  m dari posisinya sebagai upaya untuk menjaga kestabilan dari sudut pendulum.

#### 4.4. Simulasi dengan Kontrol Sudut Yaw

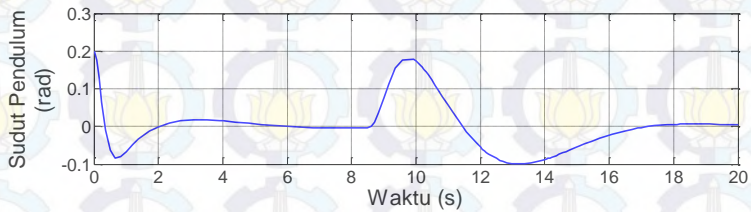
Pengujian ini dilakukan dengan memasukan fungsi kontrol sudut yaw kedalam sistem robot pendulum. Pengujian dilakukan dengan nilai dari enam *state* robot awal adalah  $x_0 = [0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  dengan nilai referensi posisi sumbu x berupa sinyal *step* dengan waktu pada 8,5 detik pada posisi 5 m. Sinyal referensi sudut yaw yang diberikan pada pengujian kali ini dapat dilihat pada gambar 4.15.



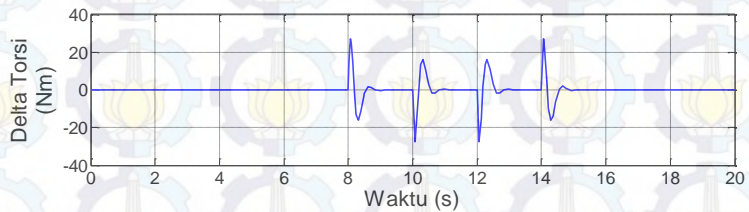
**Gambar 4.15** Sudut yaw robot



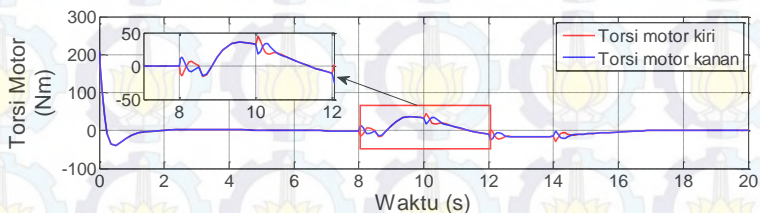
**Gambar 4.16** Posisi robot untuk pengujian kontrol *yaw*



**Gambar 4.17** Pergerakan sudut pendulum dengan kontrol *yaw*



**Gambar 4.18** Sinyal kontrol  $u_2$



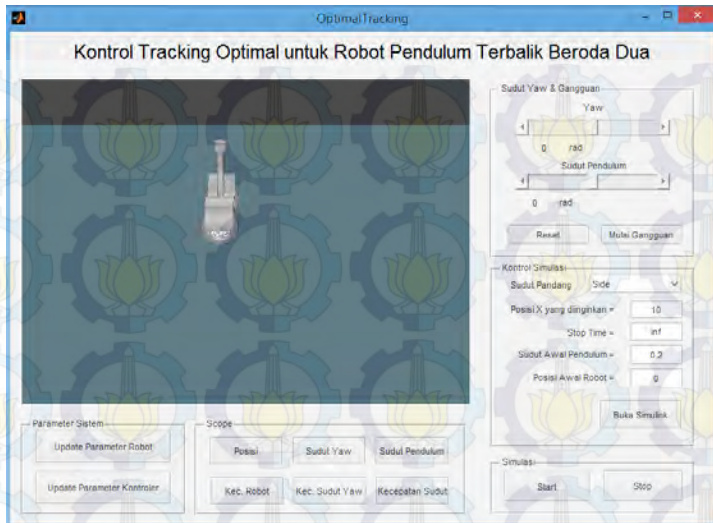
**Gambar 4.19** Torsi motor kanan dan kiri dari robot dengan kontrol *yaw*

Pada gambar 4.17 dapat dilihat bahwa sudut pendulum mengalami perubahan pada saat robot mulai melakukan proses *tracking* posisi pada 8,5 detik. Laju perubahan posisi pendulum mempengaruhi sudut pendulum robot.

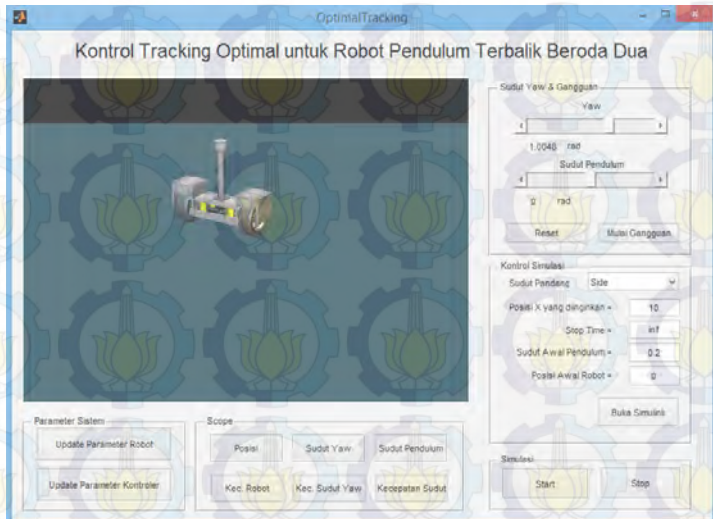
Dari hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa robot dapat melakukan *tracking* sudut *yaw* dengan baik dengan nilai *integral absolute error* 2,07. Pada saat sudut *yaw* bernilai positif (orientasi robot berputar ke arah kiri) maka nilai torsi motor kanan akan bertambah dengan besar sesuai dengan nilai delta torsi yang ada pada gambar 4.18 dan torsi motor kiri akan berkurang dengan nilai delta torsi yang sama begitu pula sebaliknya untuk nilai sudut *yaw* negatif. Hal tersebut yang membuat robot berbelok ke kanan atau ke kiri. Gambar 4.19 merupakan sinyal torsi motor pada saat dilakukan simulasi.

#### **4.5. Hasil Simulasi dari Tampilan Laboratorium Virtual**

Pada subbab ini membahas tentang tampilan dari laboratorium virtual yang telah dibuat untuk mendukung simulasi pada tugas akhir ini. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 3.4 laboratorium virtual merupakan hasil integrasi antara *simulink*, GUI, dan *Virtual Reality* 3D. Dari hasil simulasi, laboratorium virtual berhasil dijalankan dengan tampilan yang sesuai dengan hasil respon *state* yang disimulasikan di *simulink* dimana besarnya sinyal referensi dapat diubah saat waktu simulasi sedang berjalan.



**Gambar 4.20** Tampilan laboratorium saat nilai referensi posisi 10 m dengan tampilan dari samping



**Gambar 4.21** Tampilan laboratorium saat nilai referensi sudut yaw diubah dengan tampilan dari samping





## **BAB 5**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab ini membahas kesimpulan yang ditarik dari simulasi yang telah dilakukan sesuai dengan yang telah dijelaskan di bab 4. Selain itu, juga diberikan saran dari penulis untuk memberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

#### **5.1. Kesimpulan**

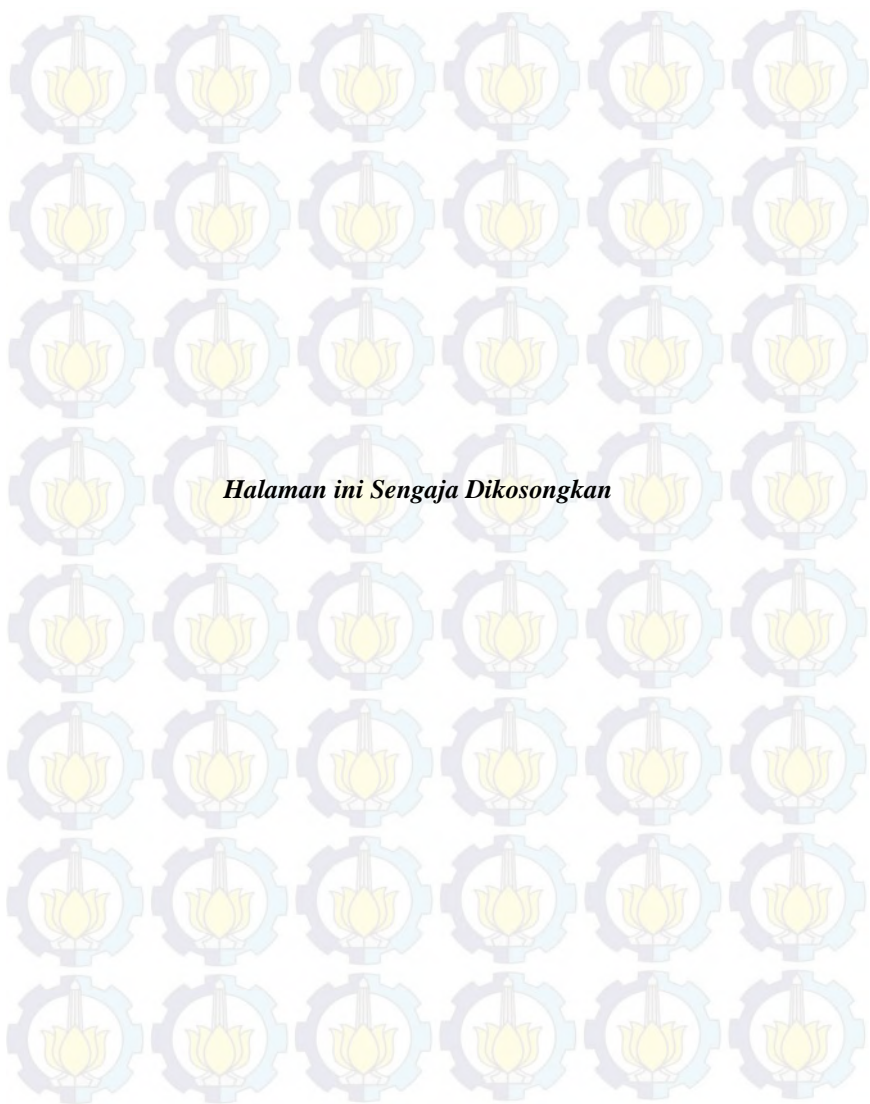
Dari hasil pengujian simulasi sistem kontrol yang dirancang untuk robot pendulum terbalik beroda dua dapat diambil kesimpulan bahwa sistem kontrol mampu membuat robot melakukan *tracking* posisi pada sumbu x dan sudut yaw dengan baik dengan mempertahankan kestabilan sudut pendulum pada sekitar 0 radian sumbu vertikal imajiner pada pergerakan sinyal sudut pendulum yang terbatas disekitar titik ekuilibrium.

#### **5.2. Saran**

Penulis menyarankan untuk menambahkan permasalahan kinematik pada sistem robot pendulum terbalik beroda dua agar robot dapat dikontrol untuk bergerak pada bidang 2 dimensi untuk penelitian selanjutnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] G. H. Lee dan S. Jung, "Line Tracking Control of a Two-Wheeled Mobile Robot Using Visual Feedback," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 10, 2013.
- [2] R. P. Man Chan, K. A. Stol dan C. R. Halkyard, "Review of Modelling and Control of Two-Wheeled Robot," *Annual Reviews in Control* 37, pp. 89-103, 2013.
- [3] D. Phaoharuhansa dan A. Shimada, "Trajectory Tracking for Wheeled Inverted Pendulum Robot using Tilt Angle Control," *IEEE*, pp. 4288-4293, 2013.
- [4] Y. Wicaksono, Laboratorium Virtual untuk Tracking Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua Menggunakan Kontrol Fuzzy, Surabaya, 2013.
- [5] Y. Ha dan S. Yuta, "Trajectory Tracking Control for Navigation of Self Contained Mobile Inverse Pendulum," *Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World*, pp. 1875-1882, 1994.
- [6] M. Rahmawaty, Stabilisasi Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua Menggunakan Kontrol Fuzzy Hybrid, Surabaya, 2011.
- [7] C.-H. Huang, W.-J. Wang dan C.-H. Chiu, "Design and Implementation of Fuzzy Control on a Two-Wheel Inverted Pendulum," *IEEE*, vol. 58, pp. 2988-3001, 2011.
- [8] K. D. Do dan G. Seet, "Motion Control of a Two-Wheeled Mobile Vehicle with an Inverted Pendulum," *J Intell Robot Syst*, vol. 60, pp. 577-605, 2010.
- [9] K. Ogata, Modern Control Engineering: Fifth Edition, New Jersey: Prentice Hall, 2010.
- [10] P. Young dan J. Willems, "An Approach to the linear multivariable servomechanism problem," vol. 15, no. 5, pp. 961-979, 1972.
- [11] Z. Li, C. Yang dan L. Fan, Advance Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems, London: Springer, 2103.



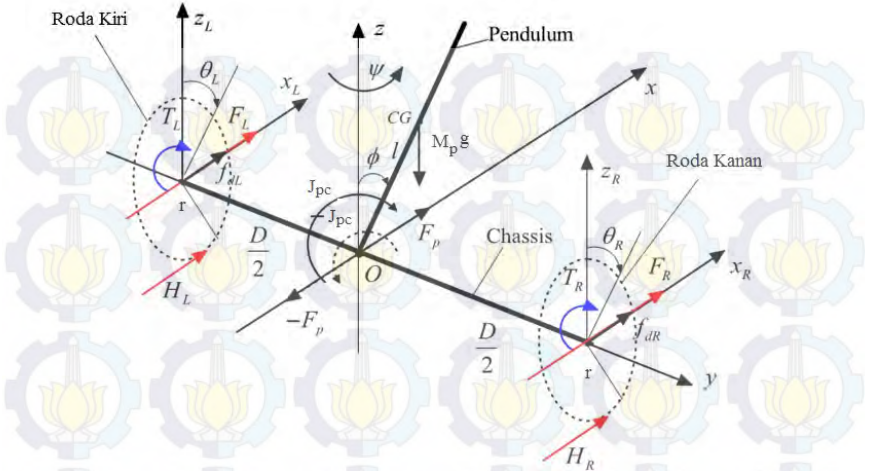


## LAMPIRAN A

### 1. Penurunan Rumus Gaya yang Bekerja pada Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua

Tata nama

|                      |   |
|----------------------|---|
| $F_L, F_R$           | Gaya interaksi antara roda kiri/kanan terhadap <i>chassis</i>               |
| $H_L, H_R$           | Gaya gesek pada roda kiri dan roda kanan                                    |
| $T_L, T_R$           | Torsi yang dihasilkan oleh motor terhadap roda kiri dan roda kanan          |
| $\theta_L, \theta_R$ | Sudut putar dari roda kiri dan roda kanan                                   |
| $x_L, x_R$           | Perpindahan posisi dari roda kiri dan kanan pada sumbu x                    |
| $\phi$               | Sudut kemiringan pendulum   |
| $\psi$               | Sudut putar robot terhadap sumbu z ( <i>yaw</i> )                           |
| $g$                  | Percepatan gravitasi  |
| $M_p$                | Massa pendulum  |
| $M_c$                | Massa <i>chassis</i>  |
| $M_w$                | Massa roda  |
| $r$                  | Jari-jari roda  |
| $x$                  | Perpindahan robot pada sumbu x  |
| $l$                  | Panjang antara poros roda dan pusat gravitasi pendulum                      |
| $D$                  | Jarak antara roda kiri dan roda kanan pada sumbu y                          |
| $J_w$                | Momen inersia dari roda terhadap sumbu y                                    |
| $J_c$                | Momen inersia dari <i>chassis</i> terhadap sumbu y                          |
| $J_v$                | Momen inersia dari <i>chassis</i> dan pendulum di sumbu z                   |
| $J_p$                | Momen inersia dari pendulum terhadap sumbu y                                |
| $F_p$                | Gaya interaksi antara <i>chassis</i> dan pendulum pada sumbu x              |
| $J_{pc}$             | Momen inersia interaksi antara <i>chassis</i> dan pendulum terhadap sumbu y |



**Gambar A.1** Diagram gaya yang bekerja pada robot pendulum terbalik beroda dua

Dengan asumsi bahwa tidak ada slip antara roda dan lantai, gaya dan torsi yang bekerja pada roda kiri sama dengan persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} J_w \ddot{\theta}_L &= T_L - H_L r \\ M_w \ddot{x}_L &= -F_L + H_L \end{aligned} \quad (A.1)$$

Sama dengan roda kiri, persamaan untuk roda kanan dapat ditulis:

$$\begin{aligned} J_w \ddot{\theta}_R &= T_R - H_R r \\ M_w \ddot{x}_R &= -F_R + H_R \end{aligned} \quad (A.2)$$

Gaya keseimbangan yang bekerja pada pendulum pada arah sumbu x dan momen inersia yang bekerja pada titik *origin*  $O$  adalah:

$$\begin{aligned} -M_p l \cos(\phi) \ddot{\phi} + M_p l \dot{\phi}^2 \sin(\phi) - M_p \ddot{x} &= F_p \\ J_p \ddot{\phi} + M_p l \cos(\phi) \ddot{x} - M_p g l \sin(\phi) &= J_{pc} \end{aligned} \quad (A.3)$$

dimana  $J_p = M_p l^2$

Gaya keseimbangan yang bekerja pada *chassis* pada arah sumbu x dan momen inersia terhadap sumbu z adalah:

$$\begin{aligned} M_c \ddot{x} &= F_L + F_R + F_P \\ J_c \ddot{\psi} &= -J_{Pc} \end{aligned} \quad (A.4)$$

Momen yang bekerja pada *chassis* dan pendulum terhadap sumbu z adalah:

$$J_v \ddot{\psi} = \frac{D}{2} (F_L - F_R) \quad (A.5)$$

**a. Mencari Rumus  $\ddot{\psi}$**

Untuk mendapatkan rumus untuk  $\ddot{\psi}$ , maka persamaan (A.2) dikurangi oleh (A.1) didapat

$$\begin{aligned} J_w (\ddot{\theta}_R - \ddot{\theta}_L) &= T_R - T_L - (H_R - H_L)r \\ M_w (\ddot{x}_R - \ddot{x}_L) &= -(F_R - F_L) + H_R - H_L \end{aligned} \quad (A.6)$$

Hubungan antara perpindahan posisi dari roda pada sumbu x dan sudut putar dari roda pada sumbu y adalah:

$$\begin{cases} \theta_R = \frac{x_R}{r} \\ \theta_L = \frac{x_L}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta_R - \theta_L = \frac{x_R - x_L}{r} \quad (A.7)$$

Hubungan antara sudut orientasi robot  $\psi$  dengan perpindahan posisi dari roda pada sumbu x adalah:

$$\psi = \frac{x_R - x_L}{D} \quad (A.8)$$

Substitusi persamaan (A.7) dan (A.8) kedalam persamaan (A.6) maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{J_w D}{r} \ddot{\psi} &= T_R - T_L - (H_R - H_L)r \\ M_w D \ddot{\psi} &= -(F_R - F_L) + H_R - H_L \end{aligned} \quad (A.9)$$

Kemudian membagi kedua sisi dari persamaan (A.9) yang pertama dengan  $R$  lalu ditambah dengan persamaan (A.9) yang kedua maka didapat

$$D \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right) \ddot{\psi} = \frac{T_R - T_L}{r} - (F_L - F_R)r \quad (\text{A.10})$$

Kalikan kedua sisi dari persamaan (A.10) dengan  $D/2$  lalu ditambah dengan persamaan (A.5) maka didapat

$$\left( J_v + \frac{D^2}{2} \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right) \right) \ddot{\psi} = \frac{D}{2r} (T_R - T_L) \quad (\text{A.11})$$

Dari persamaan (A.11) didapat persamaan gerak percepatan sudut  $yaw$  dengan rumus

$$\ddot{\psi} = \frac{D}{2rJ_\psi} (T_R - T_L) \quad (\text{A.12})$$

dengan  $J_\psi = J_v + \frac{D^2}{2} \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right)$

#### b. Mencari Rumus $\ddot{x}$

Untuk mendapatkan rumus persamaan dari  $\ddot{x}$ , maka tambahkan persamaan (A.1) dengan persamaan (A.2) untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned} J_w(\ddot{\theta}_L + \ddot{\theta}_R) &= T_L + T_R - (H_L + H_R)r \\ M_w(\ddot{x}_L + \ddot{x}_R) &= -(F_L + F_R) + H_L + H_R \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Hubungan antara perpindahan posisi dari roda pada sumbu x dengan sudut putar roda dari sumbu y adalah:

$$\theta_L + \theta_R = \frac{x_L + x_R}{R} \quad (\text{A.14})$$

Selain itu, hubungan dari perpindahan posisi robot dengan perpindahan posisi dari roda pada sumbu x adalah:



$$x = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (\text{A.15})$$

Substitusi persamaan (A.14) dan (A.15) kedalam persamaan (A.13) maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{2J_w}{r} \ddot{x} &= T_L + T_R - (H_L + H_R)r \\ 2M_w \ddot{x} &= -(F_L + F_R) + H_L + H_R \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Persamaan pertama dari (A.16) dibagi oleh  $r$  lalu ditambah dengan persamaan kedua dari (A.16) menghasilkan

$$2 \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right) \ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{r} - (F_L + F_R) \quad (\text{A.17})$$

Persamaan pertama dari (A.4) dikurangi dengan persamaan pertama dari (A.3) maka didapat

$$\begin{aligned} (M_c + M_p) \ddot{x} + M_p l \cos(\phi) \ddot{\phi} - M_p l \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \\ = F_L + F_R \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Penjumlahan dari persamaan (A.17) dengan (A.18) menghasilkan

$$M_p l \cos(\phi) \ddot{\phi} + M_x \ddot{x} = M_p l \dot{\phi}^2 \sin(\phi) + \frac{T_L + T_R}{r} \quad (\text{A.19})$$

dengan  $M_x = M_c + M_p + 2 \left( \frac{J_w}{r^2} + M_w \right)$

Persamaan kedua dari (A.4) ditambah dengan persamaan kedua dari (A.3) maka didapat

$$J_\phi \ddot{\phi} + M_p l \cos(\phi) \ddot{x} = M_p g l \sin(\phi) \quad (\text{A.20})$$

dimana  $J_\phi = J_P + J_C$ . Dari persamaan (A.20) dapat disimpulkan bahwa

$$\ddot{\phi} = \frac{M_p g l \sin(\phi) - M_p l \cos(\phi) \ddot{x}}{J_\phi} \quad (\text{A.21})$$

Substitusi persamaan (A.21) ke dalam persamaan (A.19) didapat

$$\ddot{x} = \frac{1}{\Omega_0} \left[ J_\phi \left( M_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{T_L + T_R}{R} \right) - M_p^2 l^2 g \sin(\phi) \cos(\phi) \right] \quad (\text{A.22})$$

dimana  $\Omega_0 = M_x J_\phi - M_p^2 l^2 \cos(\phi)^2$ .

### c. Mencari Rumus $\ddot{\phi}$

Untuk mendapatkan rumus persamaan dari  $\ddot{\phi}$ , persamaan (A.20) dapat disimpulkan bahwa

$$\ddot{x} = \frac{M_p g l \sin(\phi) - J_\phi \ddot{\phi}}{M_p l \cos(\phi)} \quad (\text{A.23})$$

Substitusikan persamaan (A.23) kedalam persamaan (A.19) maka didapat

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\Omega_0} \left[ -M_p l \cos(\phi) \left( M_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{T_L + T_R}{R} \right) + M_x M_p g l \sin(\phi) \right] \quad (\text{A.24})$$

## LAMPIRAN B

### 1. Inisialisasi Parameter Robot

`%Parameters Initialization.`

```
Mp=9.1;  
Mc=25.2;  
Mw=1;  
L=0.5;  
g=9.8;  
r=0.1;  
d=0.44;  
Jw=1.5;  
Jyaw=1.5;  
Jm=2.5;
```

### 2. Program untuk Mencari Nilai Gain Kontrol

`%jalankan program inisialisasi parameter terlebih dahulu`

`%linearisasi model TWIP (ModelTA=gambar 3.1)`

```
[A,B,Ck,Dk]=linmod2('ModelTA',[0 0 0 0 0 0]','[0  
0]);
```

`%matriks C dan D`

```
C=[Ck(3,:);Ck(5,:)];  
D=[Dk(1,:);Dk(2,:)];
```

`%inisialisasi sistem dalam state space`

```
sys=ss(A,B,C,D)
```

`%mencari gain sistem`

```
[Khat,P,E]=lqi(sys,Q,R);
```

`%pemisahan gain statefeedback dan gain k`

```
K=[Khat(:,1) Khat(:,2) Khat(:,3) Khat(:,4)  
Khat(:,5) Khat(:,6)]  
Ki=[-Khat(:,7) -Khat(:,8)]
```





## RIWAYAT HIDUP



Luthfi Arfiansyah adalah nama lengkap penulis dengan nama panggilan Luthfi. Penulis dilahirkan di Tangerang pada tanggal 17 agustus 1993 dan merupakan putra pertama dari dua bersaudara pasangan Muhammad Nurzen dan Etty Endayani. Penulis memulai pendidikanya dari TK Griya Rahayu kemudian melanjutkan studinya di SD Islam 17 Ramadhan, SMP Plus Islamic Village, SMAN 5 Tangerang. Setelah menamatkan studi di bangku sekolah, penulis melanjutkan studinya di Politeknik Negeri Jakarta pada program studi Teknik Listrik dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya penulis melanjutkan studi jenjang strata-1 pada bidang studi Teknik Sistem Pengaturan di Teknik Elektro ITS. Pada bulan januari 2015, penulis mengikuti seminar dan ujian Tugas Akhir sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik Elektro.